琵琶湖湖流の三次元的数値解析

京都大学工学部 正員 岩佐 義朗　京都大学工学部 正員 井上 和也
京都大学工学部 劉 樹坤　京都大学大学院 学生員 ○阿部 徹
京都大学大学院 学生員 松岡 隆之

1.はじめに：本報は、琵琶湖の湖流の長期間の再現を目的として、とくに成層の形成および破壊過程を明確にするために鉛直方向に多層分割を行い、また、河川の流入出とともに気象学的なデータから、太陽熱エネルギー収支、および風によるせん断応力を考慮して、三次元レベルモデルを開発したものである。

2.基礎式：x, y, z 軸は右手系直交座標で、z 軸は鉛直上向きとする。

運動方程式：x 方向　$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=fv-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}+A_h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+A_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (1)

y 方向　$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-fu-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y}+A_h\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+A_v\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ (2)

z 方向　$0=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$（鉛直方向の運動方程式は静水圧分布式で近似する） (3)

連続式：　$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ (4)

密度保存則：　$\frac{\partial \Delta\rho}{\partial t}+u\frac{\partial \Delta\rho}{\partial x}+v\frac{\partial \Delta\rho}{\partial y}+w\frac{\partial \Delta\rho}{\partial z}=K_h\left(\frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial y^2}\right)+K_v\frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial z^2}+g$ (5)

ここに、$\Delta\rho=\rho_0-\rho$（ρ_0：基準密度で $1000\mathrm{kg/m^3}$ をとる）である。

境界条件：湖面($z=\zeta$)では $w_s=\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u_s\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v_s\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ (6), $\rho_0 A_v\left(\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial v}{\partial z}\right)=(\tau_{sx},\tau_{sy})$ (7), $K_v\frac{\partial \Delta\rho}{\partial z}=\frac{\alpha Q}{C_p}$ (8)　ここに、τ_{sx},τ_{sy} は風のせん断応力の x, y 成分, Q は湖面において空気中より湖中へ入る熱量、C_p は水の比熱, α は温度体積膨張係数。湖底($z=z_b$)では $w_b=u_b\frac{\partial z_b}{\partial x}+v_b\frac{\partial z_b}{\partial y}$ (9), $\rho_0 A_v\left(\frac{\partial u}{\partial z},\frac{\partial v}{\partial z}\right)=(\tau_{bx},\tau_{by})$ (10), $K_v\frac{\partial \Delta\rho}{\partial z}=0$ (11) ここに、τ_{bx},τ_{by} は湖底におけるせん断応力。陸岸では $U_n=U_R$ (12), $K_n\frac{\partial \Delta\rho}{\partial n}=U_n\Delta\rho-U_R\Delta\rho_R$ (13)　ここに n は湖岸に立てた法線, U_R は河川の流入出流量に相当する流速、$\Delta\rho_R$ は河川の密度偏差。

3.差分化：空間的スタッガードスキームを用いることにし、各変量の定義位置は次のようにとる。いま、簡便のため水平面の分割で得られた水深を高さとする水柱を column と名付け、また、column をさらに鉛直方向に分割した最小単位の control volume を cell とよぶ。水位 ζ は各 column の上面の中心、密度偏差 $\Delta\rho$ は各 cell の中心、流速 u, v および w は各 cell の yz 面, xz 面、および上面のそれぞれの中心において定義する。

運動方程式の差分化：x, y 方向の運動方程式をそれぞれ x 軸の負の方向に $\Delta x/2$, y 軸の負の方向に $\Delta y/2$ だけ cell をずらせた領域を control volume として体積積分した結果を差分化する。x 方向で湖面および湖底を含まない control volume について示すと

$\frac{u^{n+2}_{i-1/2,j,k}-u^{n}_{i-1/2,j,k}}{2\Delta t}\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z^{n+1}_{i-1/2,j,k}=$ 外力項(コリオリ項)＋移流項＋圧力項＋拡散項 (14)

外力項 $=f\cdot\frac{1}{4}\left(v^{n+1}_{i,j-1/2,k}+v^{n+1}_{i,j+1/2,k}+v^{n+1}_{i-1,j-1/2,k}+v^{n+1}_{i-1,j+1/2,k}\right)$ (15)

移流項 $=-\left\{u^{n+1}_{i,j,k}\cdot u^{n}_{i,j,k}+\frac{\theta_h}{2}\left|u^{n+1}_{i,j,k}\right|\left(u^{n}_{i-1/2,j,k}-u^{n}_{i+1/2,j,k}\right)\right\}\Delta y\cdot\Delta z^{n+1}_{i,j,k}+\left\{u^{n+1}_{i-1,j,k}\cdot u^{n}_{i-1,j,k}+\frac{\theta_h}{2}\left|u^{n+1}_{i-1,j,k}\right|\left(u^{n}_{i-3/2,j,k}-u^{n}_{i-1/2,j,k}\right)\right\}\Delta y\cdot\Delta z^{n+1}_{i-1,j,k}$
$-\left\{v^{n+1}_{i-1,j+1/2,k}u^{n}_{i-1/2,j+1/2,k}+\frac{\theta_h}{2}\left|v^{n+1}_{i-1,j+1/2,k}\right|\left(u^{n}_{i-1/2,j,k}-u^{n}_{i-1/2,j+1,k}\right)\right\}\frac{\Delta x}{2}\cdot\Delta z^{n+1}_{i-1,j+1/2,k}-\left\{v^{n+1}_{i,j+1/2,k}u^{n}_{i-1/2,j+1/2,k}+\frac{\theta_h}{2}\left|v^{n+1}_{i,j+1/2,k}\right|\left(u^{n}_{i-1/2,j,k}-u^{n}_{i-1/2,j+1,k}\right)\right\}\frac{\Delta x}{2}\cdot\Delta z^{n+1}_{i,j+1/2,k}$
$+\left\{v^{n+1}_{i-1,j-1/2,k}u^{n}_{i-1/2,j-1/2,k}+\frac{\theta_h}{2}\left|v^{n+1}_{i-1,j-1/2,k}\right|\left(u^{n}_{i-1/2,j-1,k}-u^{n}_{i-1/2,j,k}\right)\right\}\frac{\Delta x}{2}\cdot\Delta z^{n+1}_{i-1,j-1/2,k}+\left\{v^{n+1}_{i,j-1/2,k}u^{n}_{i-1/2,j-1/2,k}+\frac{\theta_h}{2}\left|v^{n+1}_{i,j-1/2,k}\right|\left(u^{n}_{i-1/2,j+1,k}-u^{n}_{i-1/2,j,k}\right)\right\}\frac{\Delta x}{2}\cdot\Delta z^{n+1}_{i,j+1/2,k}$
$-\left\{w^{n+1}_{i-1/2,j,k-1/2}\cdot u^{n}_{i-1/2,j,k-1/2}+\frac{\theta_v}{2}\left|w^{n+1}_{i-1/2,j,k-1/2}\right|\left(u^{n}_{i-1/2,j-1/2,k-1}-u^{n}_{i-1/2,j-1/2,k}\right)\right\}\Delta x\cdot\Delta y+\left\{w^{n+1}_{i-1/2,j,k+1/2}\cdot u^{n}_{i-1/2,j,k+1/2}+\frac{\theta_v}{2}\left|w^{n+1}_{i-1/2,j,k+1/2}\right|\left(u^{n}_{i-1/2,j,k+1}-u^{n}_{i-1/2,j,k}\right)\right\}\Delta x\cdot\Delta y$ (16)

圧力項 $=-\frac{1}{\rho_0}\left\{\frac{1}{2}\left(P_{i,j,k-1/2}+P_{i,j,k+1/2}\right)\Delta y\cdot\Delta z^{n+1}_{i,j,k}-\frac{1}{2}\left(P_{i-1,j,k-1/2}+P_{i-1,j,k+1/2}\right)\Delta y\cdot\Delta z^{n+1}_{i-1,j,k}\right\}$ (17), $P_{i,j,k+1/2}=\rho_0 g\left\{(1-\Theta)\zeta^{n}_{i,j}+\Theta\zeta^{n+2}_{i,j}\right\}-g\int_z^{\zeta}\Delta\rho^{n+1}_{i,j}dz$ (17)

YOSHIAKI IWASA; KAZUYA INOUE; SHU-KUN LIU; TOORU ABE; TAKAYUKI MATSUOKA

ただし、上のように$\zeta=0$のときのρ_0による静水圧は取除かれている。

拡散項$=A_h\Big[\frac{1}{\Delta x}\{(u^{n+1}_{i+\frac12,j,k}-u^{n}_{i-\frac12,j,k})\Delta y\cdot\Delta z^{n+1}_{i,j,k}-(u^{n}_{i-\frac12,j,k}-u^{n+1}_{i-\frac32,j,k})\Delta y\cdot\Delta z^{n+1}_{i-1,j,k}\}+\frac{1}{\Delta y}\{(u^{n+1}_{i-\frac12,j+1,k}-u^{n}_{i-\frac12,j,k})\Delta x\cdot\Delta z^{n+1}_{i-\frac12,j+\frac12,k}-(u^{n}_{i-\frac12,j,k}-u^{n+1}_{i-\frac12,j-1,k})\Delta x\cdot\Delta z^{n+1}_{i-\frac12,j-\frac12,k}\}\Big]$

$+A_v\{\frac12(\frac{1}{\Delta z^{n+1}_{i,j,k-\frac12}}+\frac{1}{\Delta z^{n+1}_{i-1,j,k-\frac12}})(u^{n+1}_{i-\frac12,j,k}-u^{n}_{i-\frac12,j,k})\Delta x\cdot\Delta y-\frac12(\frac{1}{\Delta z^{n+1}_{i,j,k+\frac12}}+\frac{1}{\Delta z^{n+1}_{i-1,j,k+\frac12}})(u^{n}_{i-\frac12,j,k}-u^{n+1}_{i-\frac12,j,k+1})\Delta x\cdot\Delta y\}$ (19)

ただし、$u_{i,j,k}=\frac12(u_{i-\frac12,j,k}+u_{i+\frac12,j,k})$, $u_{i-\frac12,j-\frac12,k}=\frac12(u_{i-\frac12,j-1,k}+u_{i-\frac12,j,k})$, $u_{i-\frac12,j-\frac12,k-\frac12}=\frac12(u_{i-\frac12,j-\frac12,k-1}+u_{i-\frac12,j-\frac12,k})$,

$\Delta z_{i,j-\frac12,k}=\frac12(\Delta z_{i,j-1,k}+\Delta z_{i,j,k})$, $\Delta z_{i-\frac12,j-\frac12,k}=\frac12(\Delta z_{i-1,j-\frac12,k}+\Delta z_{i,j-\frac12,k})$, $\Delta z_{i,j,k-\frac12}=\frac12(\Delta z_{i,j,k-1}+\Delta z_{i,j,k})$,

$w_{i-\frac12,j,k-\frac12}=\frac12(w_{i-1,j,k-\frac12}+w_{i,j,k-\frac12})$

連続式の差分化：cellへの流入量とcellからの流出量が等しくなるように各cellについて体積積分したものを差分化する。湖面および湖底を含まないcellについて示すと

$$\frac{u^{n+2}_{i+\frac12,j,k}-u^{n+2}_{i-\frac12,j,k}}{\Delta x}+\frac{v^{n+2}_{i,j+\frac12,k}-v^{n+2}_{i,j-\frac12,k}}{\Delta y}+\frac{w^{n+2}_{i,j,k-\frac12}-w^{n+2}_{i,j,k+\frac12}}{\Delta z^{n+1}_{i,j,k}}=0 \tag{20}$$

密度保存則式の差分化：各cellについて体積積分したものを差分化する。湖面および湖底を含まないcellについて示すと $\frac{\Delta\rho^{n+2}_{i,j,k}-\Delta\rho^{n}_{i,j,k}}{2\Delta t}\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z^{n+1}_{i,j,k}=$生成項＋移流項＋拡散項 (21)

生成項$=g_{i,j,k}\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z^{n+1}_{i,j,k}$ (22)

移流項$=-\{u^{n+1}_{i+\frac12,j,k}\Delta\rho^{n+1}_{i+\frac12,j,k}+\frac{\theta_h}{2}|u^{n+1}_{i+\frac12,j,k}|(\Delta\rho^{n+1}_{i,j,k}-\Delta\rho^{n+1}_{i+1,j,k})\}\Delta y\cdot\Delta z^{n+1}_{i+\frac12,j,k}+\{u^{n+1}_{i-\frac12,j,k}\Delta\rho^{n+1}_{i-\frac12,j,k}+\frac{\theta_h}{2}|u^{n+1}_{i-\frac12,j,k}|(\Delta\rho^{n+1}_{i-1,j,k}-\Delta\rho^{n+1}_{i,j,k})\}\Delta y\cdot\Delta z^{n+1}_{i-\frac12,j,k}$

$-\{v^{n+1}_{i,j+\frac12,k}\Delta\rho^{n+1}_{i,j+\frac12,k}+\frac{\theta_h}{2}|v^{n+1}_{i,j+\frac12,k}|(\Delta\rho^{n+1}_{i,j,k}-\Delta\rho^{n+1}_{i,j+1,k})\}\Delta x\cdot\Delta z^{n+1}_{i,j+\frac12,k}+\{v^{n+1}_{i,j-\frac12,k}\Delta\rho^{n+1}_{i,j-\frac12,k}+\frac{\theta_h}{2}|v^{n+1}_{i,j-\frac12,k}|(\Delta\rho^{n+1}_{i,j-1,k}-\Delta\rho^{n+1}_{i,j,k})\}\Delta x\cdot\Delta z^{n+1}_{i,j-\frac12,k}$

$-\{w^{n+1}_{i,j,k-\frac12}\Delta\rho^{n+1}_{i,j,k-\frac12}+\frac{\theta_v}{2}|w^{n+1}_{i,j,k-\frac12}|(\Delta\rho^{n+1}_{i,j,k}-\Delta\rho^{n+1}_{i,j,k-1})\}\Delta x\cdot\Delta y+\{w^{n+1}_{i,j,k+\frac12}\Delta\rho^{n+1}_{i,j,k+\frac12}+\frac{\theta_v}{2}|w^{n+1}_{i,j,k+\frac12}|(\Delta\rho^{n+1}_{i,j,k+1}-\Delta\rho^{n+1}_{i,j,k})\}\Delta x\cdot\Delta y$ (23)

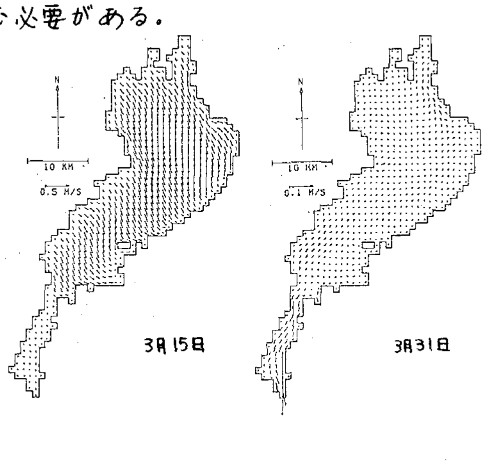
拡散項$=K_h\Big[\frac{1}{\Delta x}\{(\Delta\rho^{n}_{i+1,j,k}-\Delta\rho^{n}_{i,j,k})\Delta y\cdot\Delta z^{n+1}_{i+\frac12,j,k}-(\Delta\rho^{n}_{i,j,k}-\Delta\rho^{n}_{i-1,j,k})\Delta y\cdot\Delta z^{n+1}_{i-\frac12,j,k}\}+\frac{1}{\Delta y}\{(\Delta\rho^{n}_{i,j+1,k}-\Delta\rho^{n}_{i,j,k})\Delta x\cdot\Delta z^{n+1}_{i,j+\frac12,k}-(\Delta\rho^{n}_{i,j,k}-\Delta\rho^{n}_{i,j-1,k})\Delta x\cdot\Delta z^{n+1}_{i,j-\frac12,k}\}\Big]$

$+K_v\{\frac{1}{\Delta z^{n+1}_{i,j,k-\frac12}}(\Delta\rho^{n}_{i,j,k-1}-\Delta\rho^{n}_{i,j,k})\Delta x\cdot\Delta y-\frac{1}{\Delta z^{n+1}_{i,j,k+\frac12}}(\Delta\rho^{n}_{i,j,k}-\Delta\rho^{n}_{i,j,k+1})\Delta x\cdot\Delta y\}$ (24)

ただし、$g_{i,j,k}=\frac12(g^{n}_{i,j,k}+g^{n+2}_{i,j,k})$, $\Delta\rho_{i-\frac12,j,k}=\frac12(\Delta\rho_{i-1,j,k}+\Delta\rho_{i,j,k})$, $\Delta\rho_{i,j-\frac12,k}=\frac12(\Delta\rho_{i,j-1,k}+\Delta\rho_{i,j,k})$

4計算手順[1)]：具体的な計算方法は連続式をcolumnをcontrol volumeとして積分し、湖面での境界条件を用いれば$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta}u\,dz-\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta}v\,dz$が得られるが、この式中の$u,v$にsemi-implicit schemeを用いて$u=(1-\theta)u^{n+1}+\theta u^{n+2}$, $v=(1-\theta)v^{n+1}+\theta v^{n+2}$とし、これより差分化を行い、さらに、運動方程式の差分式から得られるu^{n+2}, v^{n+2}を代入することによって水位ζ^{n+2}に関する連立方程式とする。これを逐次近似法(S.O.R.法)によって解くことによって水位ζ^{n+2}が求まる。これからζ^{n+2}を含む運動方程式の圧力項が計算されu^{n+2}, v^{n+2}が求まる。次に密度保存則より$\Delta\rho^{n+2}$を求める。さらに、連続式にu^{n+2}, v^{n+2}を代入すればw^{n+2}が求まる。次のステップに進む時には$u^{n+i}\to u^{n+i-1}$, $v^{n+i}\to v^{n+i-1}$, $w^{n+i}\to w^{n+i-1}$, $\zeta^{n+i}\to\zeta^{n+i-1}$, $\Delta\rho^{n+i}\to\Delta\rho^{n+i-1}$ $(i=1,2)$と置き換えればよい。ただし、時間差分に中央差分を用いているので周期$2\Delta t$の計算上の振動が発達し遂には計算不安定を引き起こす[2)]ので、計算の開始と一定ステップ毎には松野の方法をはさむ必要がある。

5計算例と今後の課題：以上述べてきたモデルを用いて56年3月1日から1か月間計算を行った結果の例が右図(3月15日および31日の最上層の流速分布)である。このように、一応、計算可能であることが解ったので今後は長期間の湖流の数値解析を行いたい。



3月15日　　3月31日

《参考文献》1) 大西行雄：数値研究(その手法)，環境科学としての海洋学2，第15章，堀部純男編，東大出版会，昭和53年
2) 新田尚ら：1972，気象力学に用いられる数値計算法，気象研究ノート第110号，日本気象学会