

境界要素法の拡散解析への適用

神戸大学工学部 正員 松梨順三郎
 神戸市役所 〃 〇中後 豊
 神戸大学工学部 学生員 吉川 雅彦

1. まえがき; 近年, 電子計算機による数値シミュレーション手法の一つとして境界要素法が開発されている。これは与えられた境界値問題、初期値問題を境界積分方程式に帰着し、有限要素法と同様な離散化手法によってこれを解くという手法で、問題の次元が1次元下がるという特色がある。本研究はラプラス方程式、移流項を含まない拡散方程式の定式化の過程を調べ、数値シミュレーションを行なうことにより、境界要素法の拡散解析への有効性を検討した。

2. ラプラス方程式; 図1に示す境界値問題、即ち領域 Ω 内で支配方程式、 $\nabla^2\psi=0$, 境界 Γ 上で基本境界条件、 $\psi=\bar{\psi}$, 境界 Γ 上で自然境界条件、 $\partial\psi/\partial n=\bar{g}$ を境界要素法により解くことを考える。この境界値問題の重み付き残差法による定式化は、

$$\int_{\Omega} \psi(\nabla^2\psi^*) d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{g}\psi^* d\Gamma - \int_{\Gamma} g\psi^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \psi g^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \bar{\psi} g^* d\Gamma \cdots (1)$$

ここにバーは既知量を表わし、 $g = \partial\psi/\partial n$, $g^* = \partial\psi^*/\partial n$ である。 ψ^* は重み関数であり、次式の解である基本解を用いる。 $\nabla^2\psi^* + \Delta^2 = 0 \cdots (2)$ 、この式の解は点 i に連続的に単位負荷を与えたときの点 i から距離 r の点における定常濃度を表わし、2次元では $\psi^* = \frac{1}{2\pi} \ln(\frac{1}{r})$ である。

(2)式より(1)式は、 $\psi^i + \int_{\Gamma} \psi g^* d\Gamma = \int_{\Gamma} g \psi^* d\Gamma \cdots (3)$

ここに、 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, ψ^i は領域内の点 i における ψ の値である。(3)式を境界上に適用すると、 $c^i\psi^i + \int_{\Gamma} \psi g^* d\Gamma = \int_{\Gamma} g \psi^* d\Gamma \cdots (4)$

ここに、 $c^i = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$, θ は点 i を共有して隣接する境界線のなす角のうち、その外角である。式(4)の境界積分は一般に求めるのが困難である。そこで図2で示すように境界を n 個の要素に分割し、境界積分を近似的に求める。

・(4)式を離散化すると、

$$c^i\psi^i + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} \psi g^* d\Gamma = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} g \psi^* d\Gamma \cdots (5)$$

線形要素では要素の端点が節点となる。式(5)の境界積分はガウスの4点積分公式を使って求めた。境界上の全節点数を N とすると、(5)式は N 個の式を与える。この連立方程式を解くと、境界各節点における未知量、 ψ , g が

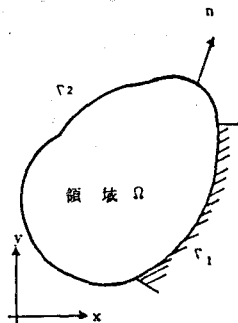


図1 領域と境界

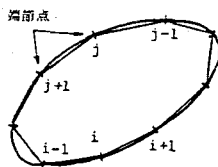


図2 線形要素

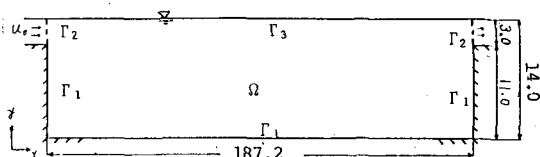


図3 (単位はcm)

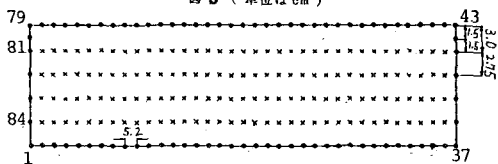
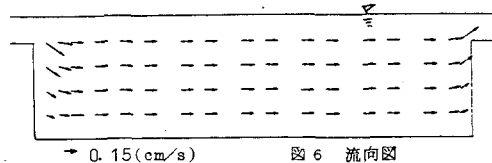
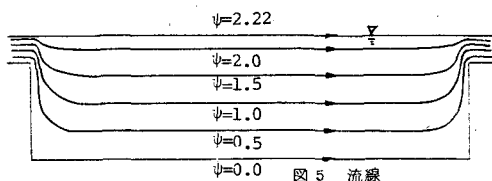


図4 (図中の長さの単位はcm.)

Junzaburō MATSUNASHI Yutaka NAKAGO Masahiko YOSHIKAWA

求まる。こうして境界節点上の ψ , ϕ が全て求まると、領域内の ψ は(3)式を離散化することによって同様に求めることができる。計算の一例として図3に示す最終沈殿池の流速を計算する。流れ関数を $\psi(x, y)$ とすると支配方程式は領域 Ω 内で、 $\nabla^2 \psi = 0$, 境界条件は Γ_1 上で $\psi = 0.0$, Γ_2 上で $\psi = u_0 h = 2.22$, Γ_3 上では y 方向の流速がないとして、 $\partial \psi / \partial n = 0.0$ とした。図4の●印は節点、×印は内点である。流入口の流量は $Q = u_0 h B = 114 \text{ cm}^3/\text{s}$ と

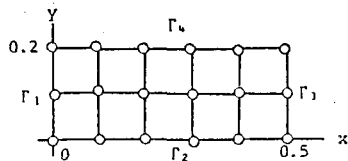


した。ここに $B = 51.4 \text{ (cm)}$, $u_0 = 0.74 \text{ (cm/s)}$, $h = 3.0 \text{ (cm)}$ とした。図5は流線を表わし、図6は流向図である。なお、内点の流速は $u = \partial \psi / \partial y$, $v = -\partial \psi / \partial x$ を差分表示することにより求めた。流入、流出部分を除いて領域の大部分で流速はほぼ水平となり、 u は約 0.158 (cm/s) 、 v は $10^{-4} \sim 10^{-6} \text{ (cm/s)}$ のオーダーとなった。モデルの高さと長さの比は、 $14.0 : 187.2$ であり、ほぼ妥当な結果と考えられる。

3. 拡散方程式; 図1において無次元支配方程式は $\partial c / \partial t = \nabla^2 c$, 境界条件は Γ_1 上で基本境界条件, $c = c$, Γ_2 上で自然境界条件, $\phi = \partial c / \partial n = \bar{\phi}$, 初期条件は、 $c = f(x, y)$ とする。ここに c は濃度、 ϕ は拡散係数、 t は時間とする。この問題に重み付き残差法を適用すると次式を得る。

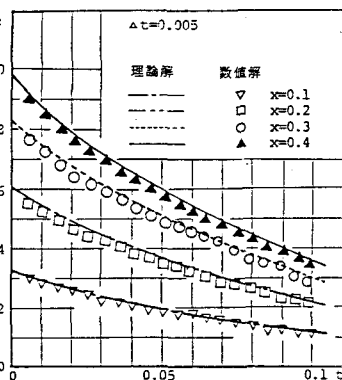
$$c^* \text{ は基本解で、 } c^* = \frac{1}{4\pi b(\tau-x)} \exp\left(-\frac{r^2}{4b(\tau-x)}\right) \cdots (7) \text{ である。}$$

基本解の性質は、 $0 \leq x < \tau$ のとき Ω 内で、 $\nabla^2 c^* + \partial c^* / \partial t = 0$, $t = \tau$ のとき $\int_{\Omega} c^* d\Omega = c_0$ である。この性質と(6)式より内点の方程式として次式を得る。



$$c_i^2 + \nabla \left[\int_{\Gamma} \phi^* c d\Gamma dt \right] = \nabla \left[\int_{\Omega} c^* \phi d\Gamma dt \right] + \left[\int_{\Omega} c c^* d\Omega \right]_{x=0} \cdots (8)$$

ここに $\phi = \partial c / \partial n$, $\phi^* = \partial c^* / \partial n$ とする。 c , ϕ は c^* , ϕ^* に比べて時間変化は緩やかであり、微小時間間隔 Δt では一定であるとして、 Δt ごとに時間積分を段階ごとに実行する。(8)式を境界上に適用し、境界要素として線形要素、内部要素として四角形一次要素を用いて離散化することによって、境界上および内点の c を求めた。計算例は図7に示すモデルで、境界条件は $\Gamma_1, t > 0, c = 0$, $\Gamma_2, t > 0, \partial c / \partial n = 0$, $\Gamma_3, t > 0, c = \exp(-\pi^2 b t)$, 初期条件は $c = \sin(\pi x)$ とした。この問題の厳密解は、 $c = \exp(-\pi^2 b t) \sin(\pi x)$ で、図8より、数値解と厳密解とは良好な一致を示していることがわかる。



参考文献 C.A.ブレイバ, S.ワーカー共著 "境界要素法の基礎と応用"

L.C.Wrobel and C.A.Brebbia "Boundary Elements in Thermal Problems"