

水理学を対象とした境界要素法の適用について

京都大学工学部 正 員 岩佐 義朗
 京都大学工学部 正 員 多田 彰秀
 京都大学大学院 学生員 〇山野 一弥

1. はじめに; 近年普及しつつある境界要素法は、水理学の分野において、ポテンシャル流、浸透流、波動等の問題に適用可能な計算法と考えられる。本報では、非圧縮性粘性流体の一方流れを取りあげ、断面内の速度分布を数値シミュレーションして求めるとともに、有限要素法、差分法の計算結果とも比較しながら境界要素法の適用性ならびに有効性について考察したものである。

2. 基礎方程式; x 軸を流下方向とする時、非圧縮性粘性流体の一方流れの基礎方程式は、次式によって構成される。

連続式 ; $\text{div } U = 0$ (1)

運動方程式 ; $\frac{\partial U}{\partial t} + U \nabla \cdot U = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 U$ (2)

ここで $U = (u, v, w)$; 速度ベクトル, $F = (F_x, F_y, F_z)$; 外力, 水路の傾きを θ とするとき $F_x = g \sin \theta$ となる。さらに、簡単のため定常問題とする。また流れの特性により、 $U = (u, 0, 0)$ といえる。従って、(1)式および(2)式は次のように変形できる。

連続式 ; $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (3)

x 方向の運動方程式 ; $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \sin \theta \right) = G$ (4)

ここで、水路断面形として円管を採用するとともに、無次元量 $Y = y/R$, $Z = z/R$, $U = \frac{1}{GR^2} (R: \text{半径})$ を (3), (4) 式に導入し、解析対象領域を4分の1円とすると次式が得られる。

支配方程式 ; $\nabla^2 U = 0 \quad (in \Omega)$ (5)

基本境界条件 ; Γ_1 上で $U = 0 \quad (R^2 = Y^2 + Z^2 = 1)$ (6)

自然境界条件 ; Γ_2 上で $\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad (Y = 0 \text{ or } Z = 0)$ (7)

ここで、 n は Γ 上の外向き単位法線ベクトル, $\frac{\partial U}{\partial n}$ は U の n 方向の導関数である(図-1 参照)。次に、解析対象領域を n 個の境界要素と m 個の内部要素に分割近似し、離散化要素としては線形要素を採用するとともに、Brebbia¹⁾に従い重み付き残差表示を行う。重み関数として Laplace 方程式の基本解 $U^* (= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, r: 2 \text{ 点間の距離})$ を用

いれば次式が得られる。

$$C^1 U^1 + \int_{\Omega} p U^* d\Omega + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} U \delta^* dp + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} U \delta^* dp + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} U \delta^* dp \\ = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} \delta U^* dp + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} \delta U^* dp + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} \delta U^* dp \quad (8)$$

ここで、 $\delta = \frac{\partial U}{\partial n}$, $\delta^* = \frac{\partial U^*}{\partial n}$, $C^1 = 1 - \frac{\partial U}{\partial n}$ である。(8)式の境界積分については一次元 Gauss 積分公式を、領域積分については Hammer²⁾による積分公式を用いる。

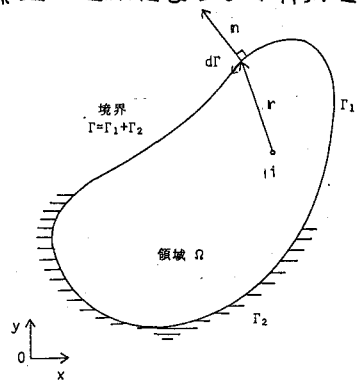


図-1 解析対象領域

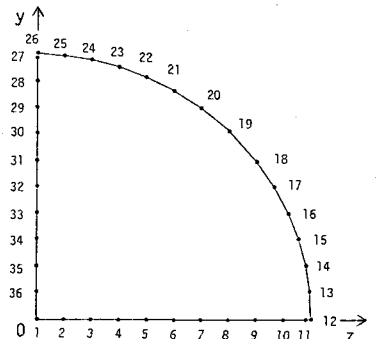


図-2 境界要素 (4分の1円)

る。計算ケースとその結果；まず、表-1に示すよう

に三ケースについて計算を行う。Case-Aでは基本境界条件と自然境界条件とが与えられる混合問題として解析する。この場合、両者の境界条件が重複する点が存在し計算上の問題となっている。Case-Bでは、上述の問題点を避けるために基本境界条件のみを与えるDirichlet問題として、またCase-Cでは有限要素法を用いて解析する。

図-3は、上述の計算ケースに従って得られた $z=0$ 上での速度をプロットしたもので、図中の厳密解とはHagen-Poiseuilleの流の解である。三ケースとも厳密解と良好一致を示している。次にCase-Aを基本とし種々の条件を変化させて計算した。その結果が表-2であり、円管の中心($y=0, z=0$)より距離 R^* の点における速度の計算値と厳密解との誤差を示している。表中の ϵ は、Brebbia³⁾に従って隅角部の処理を行う際の隅角点とその点に極めて接近した節点との間の無次元距離である。Case1~Case3より、 ϵ は $10^{-2} \sim 10^{-5}$ 程度であれば厳密解と良好一致を示している。Case1, Case4, Case5からは、節点数と誤差との間に負の相関関係が存在する事が確認できる。従って節点数を決定する際には、対象としている問題の許容誤差に応じて選択すればよい。また、Case1, Case6は、内部要素数のみが異なり他は全く同一条件で計算されたものである。その数は前者で178, 後者で41であるが、計算結果には大差がなく、この場合には内部要素数はあまり計算に影響を及ぼさないと考えられる。最後に、管路の場合と同様に

して開水路においても、C.Y.Chow⁴⁾(差分法)の計算例と同一の諸条件を与え、境界要素法を用いて速度分布を計算した。その結果とChowの結果とを比較したのが表-3である。この表から、境界要素法は、差分法ともほぼ同一の精度を有することが認められる。

4. おわりに；以上より、境界要素法は、原則的には線形の場合にしか適用できない方法であり、基本解の誘導が困難であること、隅角部の処理など数多くの問題を残してはいるがその適用できる範囲では、有限要素法や差分法と同程度の計算精度を有する解析法であるといえる。(参考文献)1), 3) C.A. Brebbia; The Boundary Element Method for Engineering (1978) 2) 龍集 徳彦・深井 一郎・渡部 孝夫による電界開放領域問題の解析, 電学通信学会論文誌 (1981) 4) C.Y. Chow; An Introduction to Computational Fluid Mechanics (1979)

表-1 計算 CASE

	n	m	計算方法	対象領域
CASE-A	36	178	BEM(混合問題)	1/4円
CASE-B	28	164	BEM(Dirichlet問題)	全円
CASE-C	108	178	FEM	1/4円

n: 節点数 m: 内部要素数

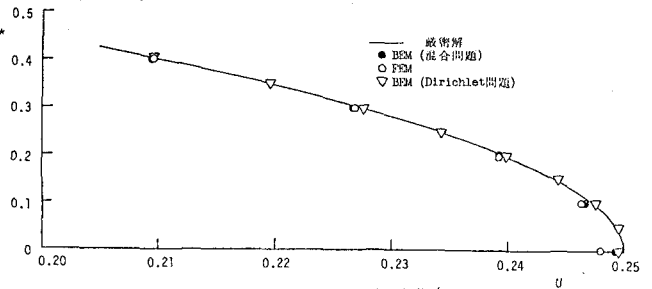


図-3 $z=0$ 上での流速分布

表-2 流速値の誤差

	厳密解	CASE1 node 36 $\epsilon=10^{-5}$	CASE2 node 36 $\epsilon=10^{-3}$	CASE3 node 36 $\epsilon=10^{-2}$	CASE4 node 22 $\epsilon=10^{-5}$	CASE5 node 56 $\epsilon=10^{-5}$	CASE6 node 36 $\epsilon=10^{-5}$
$R^*=0.0$	0.2500	-0.231	-0.231	-0.234	-0.229	-0.231	-0.250
$R^*=0.1$	0.2475	-0.333	-0.331	-0.333	-2.481	-0.256	-0.271
$R^*=0.2$	0.2400	-0.316	-0.312	-0.314	-2.004	-0.246	-0.367
$R^*=0.3$	0.2275	-0.303	-0.297	-0.299	-1.543	-0.242	-0.230
$R^*=0.4$	0.2100	-0.296	-0.289	-0.290	-1.287	-0.245	-0.351
$R^*=0.5$	0.1875	-0.297	-0.287	-0.288	-1.617	-0.254	-0.207
$R^*=0.6$	0.1600	-0.309	-0.292	-0.292	-1.374	-0.274	-0.381
$R^*=0.7$	0.1275	-0.338	-0.309	-0.301	-1.336	-0.313	-0.210
$R^*=0.8$	0.0900	-0.406	-0.344	-0.303	-2.812	-0.392	-0.547
$R^*=0.9$	0.0475	-0.601	-0.384	-0.089	-3.440	-0.611	-0.274

(誤差) = (計算値) - (厳密解) ÷ (厳密解) × 100 (%)

表-3 開水路における計算

	Q	Vmax
C.Y. Chow	$0.0569L^4 \rho g \sin \theta / \mu$	$0.114L^2 \rho g \sin \theta / \mu$
B.E.M.	$0.0571L^4 \rho g \sin \theta / \mu$	$0.114L^2 \rho g \sin \theta / \mu$

Q; 流量 Vmax; 最大流速