

拡張Fortunaモデルによる組織乱流構造の評価

大阪大学工学部 正員 室田 明

大阪大学工学部 正員 ○福原 輝幸

1. 緒論: 組織乱流の数値モデルの第一の目的は慣例的な平均化操作に基づく結果よりはむしろ条件付抽出法により得られた結果, 換言すれば組織乱流を反映した結果を説明するところにある。本研究では組織乱流構造の経時変化の扱い方に違いはあるものの, Fortunaのモデル¹⁾を発展させて, 壁面乱流の秩序だった乱れ特性の再現を試みる。

2. 数値モデル: 流下(x)方向のN-S方程式および連続式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \cdots (1) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad \cdots (2)$$
 なお, 本論文中の式は U, u, v, w により無次元化されている。両式より組織乱流の支配方程式を導く。組織乱流の x, y, z 方向の規模を $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ とすれば, 各規模は次式に従う。 $\lambda_x/h = 2 \sim 3$, $\lambda_y^+ = \lambda_y u_{\tau}/\nu = 20 \sim 30$, $\lambda_z^+ = 100 \cdots (3)$ ただし $\lambda_y^+ = \lambda_z^+ = 100$ を満たす領域とする。組織乱れにより励起される横(z)方向流速 W のオーダーは既往の結果^{2)~4)}に基づけば次式で与えられる。 $|W| = (0.1 \sim 0.3)U \cdots (4)$ (3), (4)式を用いて(1)式の各項のオーダー比較を, $U \frac{\partial U}{\partial x} \sim \frac{U^2}{\lambda_x}$, $W \frac{\partial U}{\partial z} \sim \frac{0.2 U^2}{\lambda_z}$, $\cdots$ のように行う。その際(i) $V \sim W$, (ii) 拡散項では $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ が卓越する, (iii) 圧力変化 $\frac{\partial P}{\partial x}$ は大規模乱れの挙動に対応して, x 方向には緩やかに変化するため無視する, と仮定すれば, (1), (2)式はそれぞれ次式となる。 $\frac{\partial U}{\partial t} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cdots (5) \quad \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \cdots (6)$ (5), (6)式が組織乱流の支配方程式となるが, 本研究の目的が高速部($u > 0$), 低速部($u < 0$)で条件付けした際の平均流特性と実験結果との比較にあることを考慮すれば, Fortunaモデル(図-1)とは違って, 乱流構造すなわち高・低速縞の位置は流下方向に変化しなくても差支えないとみなせる。(図-2, 3参照) そうすると(5)式は次のようになる。 $V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cdots (7)$ ここで流速 W に関して, Lauferの結果⁵⁾に従って W は y とともに線形増加するという仮定と, W の z 方向分布が波状的であるという実験事実^{2)~4)}を同時に適用すれば, W は次のように表現される。 $W = W_1(t) \cdot \sin(\sigma z) \cdot y \cdots (8)$ ここに, $\sigma = \frac{2\pi}{\lambda_z}$, 流速 V は(8)式を(6)式に代入することで求まる。 $V = V_1(t) \cdot \cos(\sigma z) \cdot y^2$, $V_1(t) = -\frac{W_1(t)\sigma}{2} \cdots (9)$ (8), (9)式を(7)式に代入し, さらに $\eta = \pm \frac{2}{\sigma} V_1(t) [\sin(\sigma z)]^{\frac{3}{2}} \cdot y^3 / \int_0^{\eta} [\sin(q)]^{\frac{1}{2}} dq \cdots (10)$ なる媒介変数を充用することで次の常微分方程式を得る。 $\frac{d^2 U}{d\eta^2} + (1 + \frac{2}{3\eta}) \frac{dU}{d\eta} = 0 \cdots (11)$ $\eta > 0$ における(11)式の解は次のようになる。 $U = \frac{U_c}{\delta(4/3, \eta_c)} \int_0^{\eta} q^{-\frac{2}{3}} \exp(-q) \cdot dq \cdots (12)$ ここに, y_c および U_c は組織乱流構造の外縁に相当する路床からの距離とそこでの平均流速をそれぞれ表わす。 $\delta(1/3, \eta_c)$ は不完全ガンマ関数であり, η_c は $y = y_c$ における η の値を表わす。(12)式の被積分関数を級数展開した後, 項別積分を実行すれば U が求まる。

$$U = \frac{U_c}{\delta(4/3, \eta_c)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{3k+1} \left(\frac{2}{9} \right)^{\frac{3k+1}{3}} \left[\frac{\{\sin(\sigma z)\}^{\frac{3}{2}}}{\int_0^{\eta} \{\sin(q)\}^{\frac{1}{2}} dq} \right]^{\frac{3k+1}{3}} \cdot y^{3k+1} \cdots (13)$$

(13)式はFortunaにより誘導された式ではあるが, 彼のモデルは図-1のように $V(z), W(z)$ が時々刻々変化するため, $\frac{dU}{dt}$ が欠落した(7)式では彼のモデルを適切に表現しているとは言

Akira MURATA, Teruyuki FUKUHARA

い難い。そのためか(13)式中の $[]^{3k+1}$ の積分範囲は単に0から π までとしている。

一方、筆者らの擬似一様モデルでは図-3のように流れ場を $V < 0$ の路床向き流れの領域($0 \leq r \leq \frac{\pi}{2}$)と $V > 0$ の水面向き流れの領域($\frac{\pi}{2} \leq r \leq \pi$)に区別することができるために、各領域ごとの平均量・変動量の評価、すなわち条件付平均化が可能となる。 $V \geq 0$ で条件付

けし平均流速 $U_H = \langle U/V < 0 \rangle$, $U_L = \langle U/V > 0 \rangle$ はそれぞれ次式で与えられる。 $U_H = \frac{2}{\pi} \frac{U_c}{\gamma(\frac{\pi}{2}, \eta_0)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} B_k d(rz) \cdot y^{3k+1} \cdot E\{[|V_i(t)|]^{3k+1}\}_H$,
 $U_L = \frac{2}{\pi} \frac{U_c}{\gamma(\frac{\pi}{2}, \eta_0)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} B_k d(rz) \cdot y^{3k+1} \cdot E\{[|V_i(t)|]^{3k+1}\}_L \cdots (14)$ $E\{ \}_H, E\{ \}_L$

はそれぞれ流体塊④($V < 0$)および流体塊⑤($V > 0$)により励起される $|V_i(t)|^{3k+1}$ の期待値であり、 $V_i(t)$ が片側ガウス分布に従うとすれば、 $E\{[|V_i(t)|]^{3k+1}\}_H = \frac{1}{\pi} (2)^{\frac{3k+1}{2}} (\sigma_V^2)^{\frac{3k+1}{2}} \cdot \Gamma(\frac{3k+1}{2}) \cdots (15)$ となる。慣例的な平均流速は U_H, U_L の平均値とする。 $\bar{U} = \frac{1}{2}(U_H + U_L) \cdots (16)$ (15式

中の σ_V^2 はそれぞれ流体塊④および⑤による $V_i(t)$ の乱れ強さを表す。既往の結果⁵⁾⁷⁾より、 $y^+ \leq 15$ で V の歪度が負となる性質も組織乱流を反映した統計的性質とみなせば、両値は必ずしも一致せず、 $\sigma_{VH}/\sigma_{VL} = \beta (> 1.0) \cdots (17)$ が予測できる。Lauferの結果⁵⁾によれば $\bar{W}^2 = ay^+ (y^+ \leq 15)$ が成立するから、 σ_{VH} と σ_{VL} の平均値 σ_V のオーダーは $\sigma_V = \frac{\gamma \alpha}{\sqrt{2}} \cdots (18)$ より推定できる。例えば、Lauferの結果に従うと、 $\alpha = 0.077$, $\sigma_V = 3.4 \times 10^{-3}$ となる。

本モデルでは $\lambda_z^+ = 100$ および(8)式の両者を満たす必要があるため、 γ_c としては15、 U_c としてはLauferの結果⁵⁾を基に11を選んだ。

以上より、 β の値を適当に選べばバッファ域より壁面側における条件付平均値の推定が可能となる。また、領域別のレイノルズ応力は $\langle uv/v < 0 \rangle \equiv U_{VH} = (\bar{U}_H - \bar{U})V_H$, $\langle uv/v > 0 \rangle \equiv U_{VL} = (\bar{U}_L - \bar{U})V_L \cdots (19)$ で各々求め得る。

3. 計算結果：ここでは $\sigma_{VH} = 3.5 \times 10^{-3}$, $\sigma_{VL} = 2.5 \times 10^{-3}$, $\beta = 1.4$ の場合を示す。図-4は平均流速分布の結果であり、 $U_H > \bar{U} > U_L$ が成立する。これより、 $V < 0$ の領域では(流体塊④)は相対的に速度過剰であり、 $V > 0$ の領域では(流体塊⑤)は速度欠損であることがわかる。前者は高速縞に、後者は低速縞に対応するから、図-2, 3に示した秩序だった乱流場は本モデルで説明できる。ちなみに(15)式を微分することで壁面剪断応力が求まり、 $V < 0$ の領域で $\tau_w = 1.29$, $V > 0$ の領域で $\tau_w = 0.72$ となる。これは組織乱流により流速と同様、 τ_w も横断方向に不均一であることを示している。レイノルズ応力の結果は紙面の都合上、発表時に示す。

〔参考文献〕(1) Fortuna, G.: Ph.D., 1971. (2) Kline: J.F.M., 1967.

(3) 祢津他：昭和53年度関西支部講義。(4) 室田他：土木学会論文報告集, 1982.

(5) Laufer: NACA Rep. 1174, 1954. (6) Gupta他: Phys. Fluids, 1972. (7) Paupach: J.F.M., 1981.

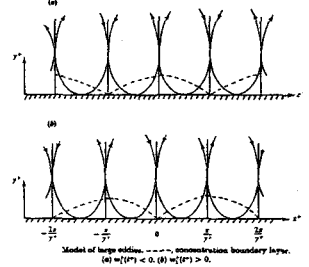


図-1 Fortunaのモデル

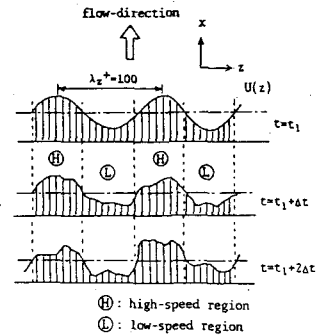


図-2 本モデル

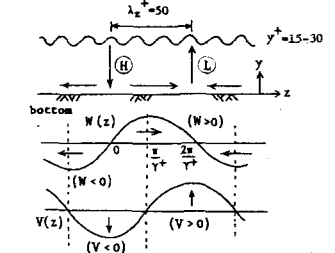


図-3 秩序だった乱流構造のモデル

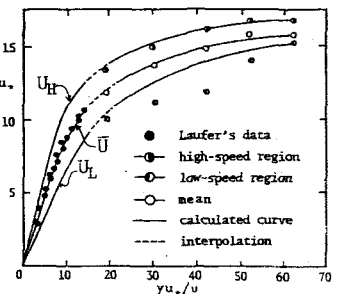


図-4 条件付流速分布