

# 浮遊粒子の拡散係数に関する確率過程論的検討

京都大学工学部 正員 中川 博次  
 京都大学工学部 正員 辻本 哲郎  
 京都大学大学院 学生員 篠持 和洋

1. まえがき 本研究では浮遊粒子の挙動を確率モデルで表わすことにより、不規則事象の積み重ねとしての濃度フラックスを検討した。さらに確率モデルを利用して、水面、底面での境界特性も考慮に入れた浮遊粒子の見かけの拡散係数の評価を試みた。

2. 浮遊粒子の挙動 平衡状態にある浮遊砂流では、沈降による濃度フラックス  $-w_0 C$  と乱流拡散により上へ輸送される濃度フラックス  $\overline{C'w'}$  が均衡している。このうち、後者に対しては拡散係数  $E_s$  が導入され、平衡状態は次式で表わされる。  $-w_0 C = \overline{C'w'} = E_s \frac{\partial C}{\partial y} \dots (1)$  ここで、拡散係数  $E_s$  は渦動粘性係数  $E_m$  と等しいか  $\beta$  倍程度 ( $\beta=1.2$ ) とされる。ところで乱流拡散項は不規則量の累積であるから、確率過程論的取り扱いが自然である。粒子の鉛直方向の挙動について、 $t=t_0$  において  $y=y_0$  にある粒子が  $t=t_0+\Delta t$  に  $y$  に存在する確率密度は Smoluchowski の条件を用いて、次のように表わされる。

$$f(y, t+\Delta t | y_0, t_0) = \int g(y, t+\Delta t | y', t) f(y', t | y_0, t_0) dy' \dots (2)$$

ここで  $g(y, t+\Delta t | y', t)$  は推移確率である。式(2)によって一つ一つの粒子の挙動を追跡することが可能であり、これによって浮遊粒子の鉛直方向存在確率密度を計算する方法がいくつか考えられる。この場合、最も重要なのは  $g(y, t+\Delta t | y', t)$  であり、これは微小時間  $\Delta t$  の大きさと  $y'$  の関数となるから、推移量を  $\eta$  として  $g(y, t+\Delta t | y', t)$  と表わす。境界を無視した  $(-\infty, \infty)$  における平衡状態では、  $E[\eta]_{at, y'} = -w_0 \Delta t \dots (3)$  となることが予想される。一方、

$\text{Var}[\eta]_{at, y'}$  については次のように考える。すなわち、  $\text{Var}[\eta]_{at, y'} = \sigma_\eta^2 \Delta t \dots (4)$

であり、 $\sigma_\eta$  について  $\sigma_{p/at, y'} = \lambda_1 \sqrt{\bar{\nu}^2} \Delta t \dots (5)$ 、 $\sigma_{p/at, y'} = \lambda_2 \cdot \ell_p$  ( $\ell_p$ : 混合距離)  $\dots (6)$  の二つの考え方ができる。Yalin & Krishnapan<sup>1)</sup> や 吉川・石川<sup>2)</sup> は式(5)を採用している。ここでたとえ  $\sqrt{\bar{\nu}^2} \simeq \sqrt{\bar{\nu}^2}$  とすることも時間スケール  $\Delta t$  の決定方法が問題である。ところで式(2)を Taylor 展開し、極限操作を加えてから拡散方程式と比較すると次の関係が得られる。

$E_s = \frac{1}{2} \frac{\sigma_\eta^2}{\Delta t} \dots (7)$   $E_s, \sqrt{\bar{\nu}^2}$  を既知として式(8)~(11)を仮定し、式(7)によって  $\Delta t$  を逆算すると  $\Delta t$  は図-1 のように鉛直方向に変化する。

$$E_s = \begin{cases} \kappa u_* y (1 - y/h) \dots (8) & \sqrt{\bar{\nu}^2}/u_* = \begin{cases} 1.27 \cdot \exp(-y/h) \dots (10) \\ 0.8 \dots (11) \end{cases} \\ \frac{\kappa}{\delta} u_* h \dots (9) \end{cases}$$

また Yalin<sup>3)</sup> の提案による  $u_* \Delta t/h = 0.0875 \dots (12)$  も図中に示した。図-1 の(1)は式(8), (10)を用いたものだが、乱れの何らかの時間スケールがこのような分布を示すものかどうが疑わしい。なお、式(5), (6), (7)より次式が得られる。  $E_s = \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_2 \sqrt{\bar{\nu}^2} \ell_p \dots (13)$  今、混合距離理論

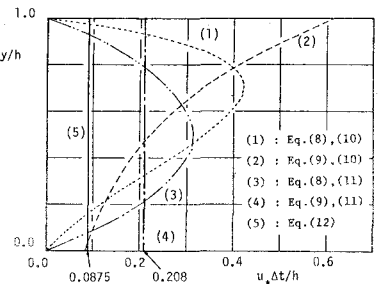


図-1  $\Delta t$  の鉛直方向分布

よって流速分布が知られているとし、 $\varepsilon_s = \varepsilon_m$ ,  $\sqrt{v}^2 = \sqrt{v}^2$ ,  $l_p = l$  とすると、 $\sqrt{v}/u_* = \frac{z}{\kappa \kappa_*} (1 - y/h) \dots (14)$  となり図-2 に示すように式(10)の乱れ強度分布と符合しない。以上のように乱れ強度分布、混合距離、流速分布と拡散係数の関係の不十分さに起因する基本的な問題が残っていると考えられ、さらに粒子の水流の乱れへの追従性と関連する  $l_p$ ,  $\kappa$ ,  $\kappa_*$ ,  $\sqrt{v}^2$  など粒子の運動方程式にもとづいて基礎的検討を加える必要のあることがわかった。

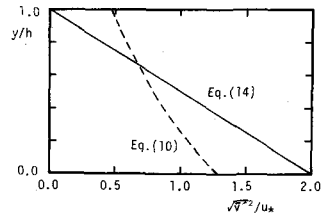


図-2 乱れ強度分布

3. 境界条件の検討 浮遊砂のもう一つの大きな問題は壁(河床および水面)の存在で、そこでの粒子の挙動を考える必要がある。一般に推移確率は  $g(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma_\eta} \exp\left[-\frac{(\eta - (-w_0 \Delta t))^2}{2 \sigma_\eta^2}\right] \dots (15)$  と近似される。 $(-\infty, \infty)$  の一様場においては粒子の推移量の平均値  $-w_0 \Delta t$ 、標準偏差  $\sigma_\eta$  は一定であるが、壁の存在によりこれらは変化するし、分布形の形も変化する。その平均値、標準偏差を  $-\bar{v}_p \Delta t$ ,  $\sigma'_\eta$  と表わす。このとき、 $\varepsilon'_s = \frac{\sigma'^2_\eta}{2 \Delta t} \dots (16)$  とおくと、いわゆる変動量の累積としての濃度フラックスは  $\varepsilon'_s \frac{dc}{dy}$  で表わされ、一方、平均的挙動による濃度フラックスは  $-\bar{v}_p C$  で、これらのつり合い式が砂の挙動を表わす。これを一般の浮遊砂についての拡散方程式と形式的に一致させて、 $\varepsilon''_s \frac{dc}{dy} + w_0 C = 0 \dots (17)$  とおくと、 $\varepsilon''_s = \varepsilon'_s \frac{w_0}{\bar{v}_p} \dots (18)$  となる。これを見かけの拡散係数と呼ぶ。ここで、次のような反射条件によって  $g(\eta)$  の変化を調べた。すなわち、水面はいわゆる反射壁とし、床面では反射率を 0.5 とし、さらに反射した後の挙動に沈降速度を考慮して、一部は河床にとどまるものとした。図-3 に拡散源が (a) 0.5, (b) 0.3, (c) 0.8 の場合の  $g(\eta)$  の分布形の計算結果を示す。(a) はほとんど境界の影響を受けていないのに

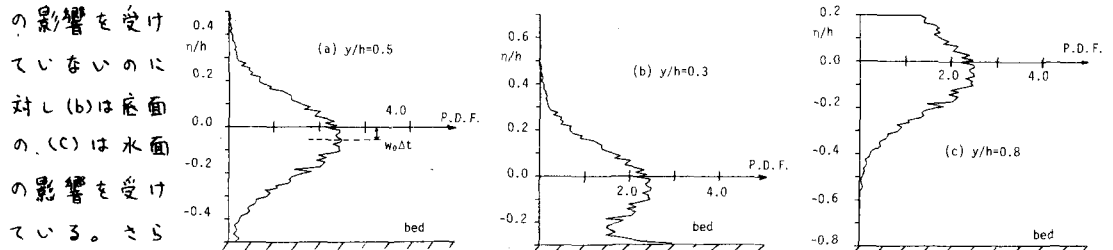


図-3  $g(\eta)$  の変化

に図-4 に  $\varepsilon''_s$  の分布、図-5 にシミュレーションによる浮遊砂濃度分布を示した。参考のため Rouse 式による濃度分布形と Vanoni<sup>4)</sup> の実測値も示した。なお、シミュレーションは式(9), (11)による一様拡散場を仮定して行なったものである。

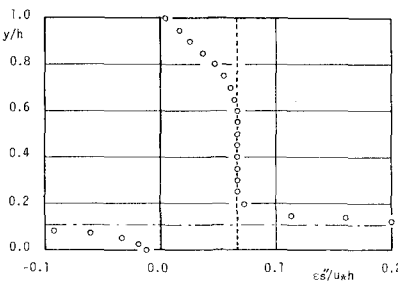


図-4 みかけの拡散係数  $\varepsilon''_s$

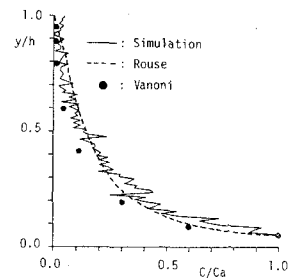


図-5 濃度分布形

<参考文献> 1) Yalin & Krishnappan (1973): IAHR, 2) 吉川・石川 (1978): 土論集, 3) 中川 (1980): 応力連講, 4) Vanoni (1946): Trans. ASCE.