

有限要素法による地中水の流動解析

京都大学工学部 正 員 高橋琢馬 権葉元晴
 京都大学大学院 学生員 張昇平 奥村組 亀田茂

1: 概要: 飽和領域と非飽和領域が同時に存在する地中水の運動を Galerkin 有限要素法を用いて解析する。

2: 飽和帯——非飽和帯の地中水運動基礎方程式:

基礎方程式を誘導するために次の二つの仮定をしておく必要がある: (1) 土層の変形は Z 軸方向にのみ生じ、(2) 変形に際して、個々の土粒子の密度 ρ_s は変化せず、その結合様式が変化する。仮定 (1) により、土粒子の移動速度 $\mathbf{W}$ は Z 成分のみが非零で、 $\mathbf{W} = (0, 0, W_z)$ と書ける; 仮定 (2) により、 $d\rho_s/dt = 0$ である。一方、変形座標系 (Deforming coordinates) で水の運動速度は座標軸に対する速度ではなくて、土粒子に対する相対速度である。これらの考えに基づいて、ダルシー法則を用いて、任意の一つの微小六面体の変形について、その中の水と土との連続式から圧力水頭 ψ に関する次の基礎方程式が得られる:

$$L(\psi) = H \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla \cdot \{P(\nabla \psi + \nabla Z)\} = 0 \quad (1)$$

ここに L は偏微分作用素で、 H と P は $H = SP(\alpha' + \beta n) + \rho c$ 、 $P = \rho^2 g k / \mu$ で表わされる。

これらの変数の意味と圧力水頭との関係は図 1 に示してある。

ここで垂直断面における二次元問題を考えることにしよう。Dirichlet 境界条件は各時刻の既知圧力水頭、Neumann 境界条件は流速である。初期条件は反復法で定常流問題を解くことによって与えられる。

3. Galerkin 有限要素法による定式化:

Galerkin 法は残留誤差 (Residual error) と形状関数 (Shape function) とが直交になるように偏微分方程式の近似解を求める方法の一つである。まず、領域全体を一番簡単な三角形要素に区分し、一つの要素について線形内挿で節点変量 (圧力水頭 ψ) を近似する。そうすると、任意の要素 e の節点 i 、 j 、 m について次式が得られる:

$$\iint_e N_l(x, y) L(\tilde{\psi}) d\tau \quad (l=i, j, m) \quad (2)$$

ここに N_l は形状関数、節点座標によって定まるものである。 $\tilde{\psi}$ は線形内挿による ψ の近似値で、 $\tilde{\psi} = \psi_i N_i + \psi_j N_j + \psi_m N_m$ である。(2) 式から次の要素方程式が得られる (簡単のために $\tilde{\psi}$ を ψ と書く):

$$[D^e] \begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_m \end{Bmatrix} + [F^e] \begin{Bmatrix} \psi_i \\ \psi_j \\ \psi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_i \\ C_j \\ C_m \end{Bmatrix} \quad (3)$$

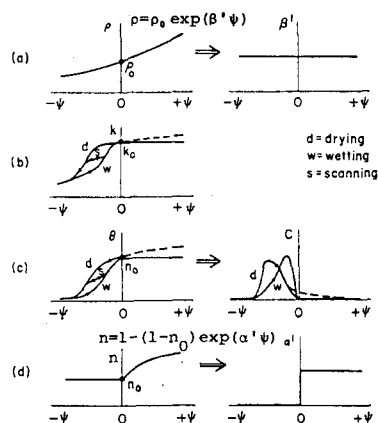


図1 Schematic diagram of the functional inputs. (a) Density of water $\rho(\psi)$ and compressibility of water β' . (b) Specific permeability of the soil $k(\psi)$. (c) Moisture content $\theta(\psi)$ and specific moisture capacity $C(\psi)$. (d) Porosity $n(\psi)$ and vertical compressibility of the soil α' .

(from Freeze (1971))

各要素について上式を求めて、全領域でそれらを加えて、次のシステム方程式を得る：

$$[D]\{\psi\} + [F]\{\psi\} = \{C\} \quad (4)$$

この連立非線形方程式を解くために Douglas-Dupoud (1970) の予測子—修正子法を用いて時間を離散化する。\$\psi\$ の一次近似解を \$\bar{\psi}\$ とすると、\$\bar{\psi}\$ は

$$\frac{1}{2}[D\psi_{\text{rot}}]\{\bar{\psi}_{\text{rot}} + \psi_{\text{st}}\} + \frac{1}{\Delta t}[F\psi_{\text{rot}}]\{\bar{\psi}_{\text{rot}} - \psi_{\text{st}}\} = \{C_{\text{st}} + \Delta t/2\} \quad (5)$$

から求められる。\$\psi_{\text{st}} = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_{\text{rot}} + \psi_{\text{st}})\$ とおくと、\$\psi_{\text{rot}}\$ は

$$\frac{1}{2}[D\psi_{\text{rot}}]\{\psi_{\text{rot}} + \psi_{\text{st}}\} + \frac{1}{\Delta t}[F\psi_{\text{rot}}]\{\psi_{\text{rot}} - \psi_{\text{st}}\} = \{C_{\text{st}} + \Delta t/2\} \quad (6)$$

により得られる。これを反復して、任意の時刻の圧力水頭 \$\psi\$ を得る。

4. 浸透のシミュレーション

大きさ \$2000 \times 300 \text{ cm}^2\$ の領域で外挿法で降水浸透による地中水運動をシミュレーションした。土は等質で、\$K_0\$ は \$5.8 \times 10^{-9} \text{ cm}^4\$ (透水係数 \$K_0\$ は \$1.62 \text{ cm/hr}\$)。\$n_0\$ は \$0.3\$、\$\alpha\$ は \$0.003 \text{ cm}^{-1}\$、\$\rho_0\$ は \$1.09/\text{cm}^3\$、\$\beta\$ は \$4.23 \times 10^{-8} \text{ cm}^{-1}\$、\$\mu\$ は \$45.479/\text{cm} \cdot \text{hr}\$ である。いろいろな場合にシミュレーションをして結果を得た。図2には雨が \$0.92 \text{ K}\$ という強度でふりつづける場合の結果が示してある。これらのシミュレーションによって、次のことが分かる。

- (1) 降水と蒸発散による地下水面の変化はさまざまな原因に制御されるが、それらの中で主なものは地下水面の深さ、降水或いは蒸発散の継続時間および非飽和帯の透水性と含水率である。
- (2) 非飽和帯の水運動はほとんど垂直である。
- (3) 地表面に水がたまるかどうかは降水強度と土の浸透能による。非飽和帯に水がたまるのは不透水層或いは難透水層があるからである。
- (4) この方法で地中水運動機構を説明するのに役立つ、かつ定量的に降水の流出が分析できる。

なお、詳細は当日報告する。

参考文献

Freeze, R.A. (1971): Three-dimensional transient saturated-unsaturated flow in a ground water basin. Water Resources Research, Vol. 7, No. 2.

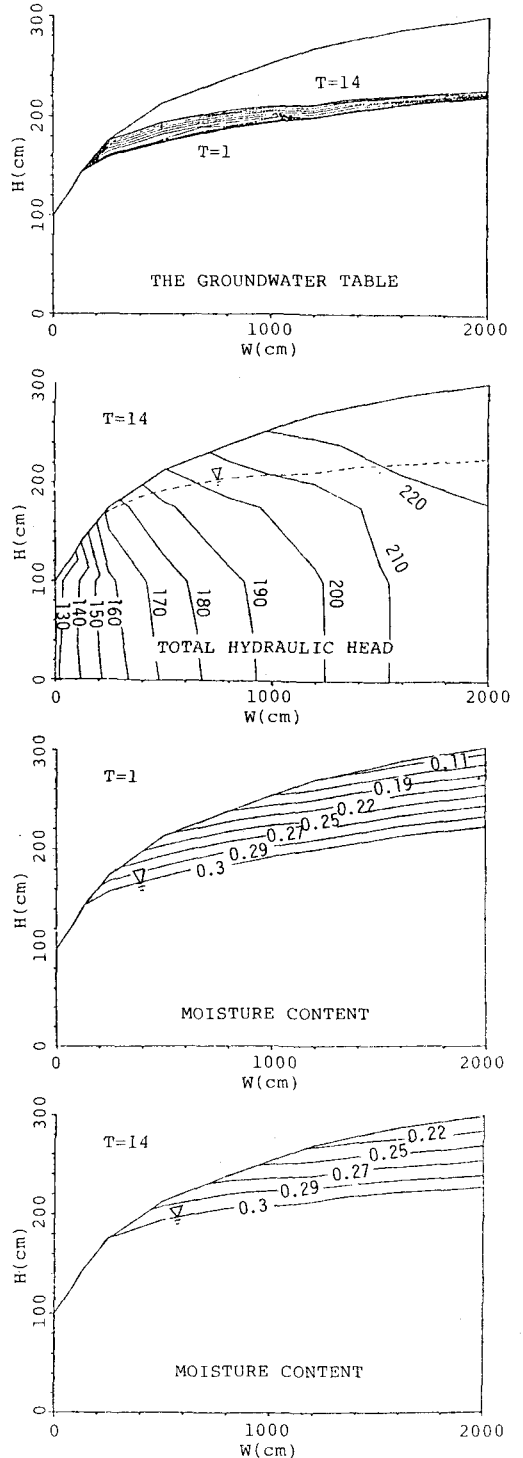


図2 降水浸透による地中水運動