確率過程的流出モデルの評価法に関する基礎的考察

京都大学工学部　正　員　高棹琢馬　　正　員　宝　　馨
京都大学大学院　学生員　今村　宏　　学生員　○楠橋康広

1. 緒　言

洪水流出モデルは研究途上にあり、種々のモデルが存在する。どのモデルを選択するか、どのようなモデルを構築するかという問題は未だ解決されていない。その理由の1つとして、モデルの評価法に統一的な見解が得られていないことが挙げられる。

モデル評価の意義は、最終的には最も良いモデル構造を探求し確立することであるが、その過程において、次の2つのことを考えていかねばならない。1つは、あるモデルについてその妥当性を評価すること、もう1つは、何種類かのモデルを比較評価することである。

本講演では、近年特に多用されつつある確率過程的流出モデルの評価に関して基礎的な事項を述べる。

2. モデル評価の基本的考え方

流出現象は、物理的かつ確率過程的であることから、これらの特徴を表現するようなモデルを構築しなければならない。確率過程的モデルは、決定論的に表現される部分(deterministic part)と、確率過程的な部分(stochastic part)からなる。洪水流出モデルは、一般に次の形をしている。

$$\{Y\}=f(\{R\},H_0,A) \tag{1}$$

ここに、{R}は降雨入力，H_0は降雨開始時の流域の保湿条件すなわち初期条件，Aは流域場の条件，{Y}は問題とする地点の洪水流出，f(・)は洪水流出モデルを表現している汎関数である。

モデル同定とは、与えられた降雨・流出データと他の水文学的知識をもとに、(1)式の f,H_0,A を決定することである。この f,H_0,Aが正しく与えられれば、そのモデルで{Y}を表わせない部分は、流出系の真に stochastic な部分だけであって、それを{ε}と表わすと、

$$\{Y\}=f(\{R\},H_0,A)+\{\varepsilon\} \tag{2}$$

のように記述することができる。このとき、{ε}は全くランダムで平均値0 となる。

逆に、流出モデル(1)が存在するとき、そのモデルによって表わせない stochastic な部分を(2)式のように{ε}として含め、{ε}の統計的性質を検討することによって、モデルの良否を判定することができると考えられる。

3. 確率過程的モデルの評価法

近年、観測系も含めた流出系を、確率過程的状態空間モデル(stochastic state-space model)で記述し、Kalmanフィルターのような統計的推定理論を応用して水文システムにおける実時間の予測・制御を行なうという手法が導入されてきており、高棹らもそれについて検討してきている[1),2),3)]。

確率過程的モデルは、(2)のようにノイズ{ε}を陽に式中に含むモデルであるが、状態空間表示すれば次式のようになる。

$$\dot{x}(t)=f(x(t),r(t))+w(t)\ ,\quad t\geq t_0 \tag{3}$$

$$y(t_k)=g(x(t_k))+v(t_k) \tag{4}$$

ここに、xは状態ベクトル，rは降雨入力，yは観測(流出量)ベクトルで、wはシステムノイズ、vは観測ノイズである。f,gは一般に非線形関数である。tは時間を表わし、t_k (k=0,1,・・・)は流量観測時刻，ドット(˙)は時間微分 d/dt を表わす。

2.での考え方から (3),(4)式の f,g,初期状態 $x(t_0)$などが適切に与えられていれば、付加されたノイズw,vは流出系に存在するstochastic な部分のみを表わすことになるはずである。したがって、w,v の統計的性質を検討することによって、確率過程的モデル(3),(4)の良否が判定できるものと考えられる。

確率過程的モデルの同定においては、f,g,$x(t_0)$とその共分散P_0, w,vの統計量まで含めて同定されなければならない。ノイズの統計量の同定についてはこれまで十分な議論がなされておらず、今後検討していく予定であるが、ここではそれらすべてがすでに同定されているモデルの評価について述べる。ただし、非線形連続の(3)式は、次のように分離して取扱うことにする[3)]。

$$\dot{x}(t)=f(x(t),r_k)\quad ,\quad t_{k-1}\leq t<t_k$$
$$x(t_k)=x(t_k^-)+w(t_k)\quad ,\quad t=t_k \tag{5}$$

このように、システムノイズ・観測ノイズともに離散的に扱うことにして、これらが仮定した統計的性質を満たすかどうかの検討により、モデルの評価を行なうのである。

ところで、(5),(4)式で表わされる流出システムの中で、われわれが観測できるのは、入力r_kと出力$y(t_k)$のみであり、状態xの確定した値は不明である。したがって、w,vの真値もまたわからないので、それらを推定したのちその推定値の系列について検討することになる。

4. ノイズの推定

(5),(4)式のモデルが、線形・離散システムとして、

$$x(k+1)=\Phi x(k)+Gr(k)+\Gamma w(k) \tag{6}$$

$$y(k)=Hx(k)+v(k) \tag{7}$$

と表わされている場合を考える。このとき、(8)～(15)式のKalmanフィルターのアルゴリズムが直接適用できる。

初期条件： $\hat{x}(0|0)=x(0),P(0|0)=P(0)$ (8)

状態推定（^{T}は転置記号)：

$$\hat{x}(k|k)=\hat{x}(k|k-1)+K(k)\nu(k) \tag{9}$$

$$\nu(k)=y(k)-H\hat{x}(k|k-1) \tag{10}$$

$$K(k)=P(k|k-1)H^T\Sigma_\nu^{-1}(k) \tag{11}$$

$$\Sigma_\nu(k)=HP(k|k-1)H^T+R \tag{12}$$

$$P(k|k)=(I-K(k)H)P(k|k-1) \tag{13}$$

1ステップ先の予測

$$\hat{x}(k|k-1)=\Phi\hat{x}(k-1|k-1)+Gu(k) \tag{14}$$

$$P(k|k-1)=\Phi P(k-1|k-1)\Phi^T+\Gamma Q\Gamma^T \tag{15}$$

このアルゴリズムを用いて、降雨・流量の系列から毎時のノイズの推定をすることができる。その手順は以下のようである。

（文番号は図の番号に対応する。）

①今、時点k-1にいるとして、上述のアルゴリズムによって、状態の推定値 $\hat{x}(k-1|k-1)$ が得られているとする。

②これに基づいて(14)式から、1時間先の予測 $\hat{x}(k|k-1)$ が与えられる。

③時点kとなり、新たな観測値 y(k) が得られる。

④filteringによって、状態の推定値 $\hat{x}(k|k)$ を求める。

⑤システムノイズの推定値は、次式により求める。

$$\hat{w}(k)=\hat{x}(k|k)-\hat{x}(k|k-1) \tag{16}$$

Takuma TAKASAO　Kaoru TAKARA　Hiroshi IMAMURA　Yasuhiro KUSUHASHI

⑥ (7)式より出力 $y(k)$ の推定値 $\hat{y}(k|k)$ は、

$$\hat{y}(k|k)=H\hat{x}(k|k) \tag{17}$$

⑦ よって、観測ノイズの推定値は、次式により求める。

$$\hat{v}(k)=y(k)-\hat{y}(k|k) \tag{18}$$

システムノイズの推定値 $\hat{w}(k)$ は、(16), (9) より、

$$\hat{w}(k)=K(k)\nu(k) \tag{19}$$

よって、$\hat{w}(k)$ の平均値，共分散，ラグ i の自己共分散は、

$$E\{\hat{w}(k)\}=0 \tag{20}$$

$$E\{\hat{w}(k)\hat{w}^T(k)\}=K(k)\Sigma_\nu(k)K^T(k) \tag{21}$$

$$E\{\hat{w}(k)\hat{w}^T(k+i)\}=0 \tag{22}$$

となる。

$\hat{x}(k|k)$ が最適推定のときイノベーション $\nu(k)$ の系列は互いに独立であることはイノベーション特性 (innovations property) としてよく知られており[4]、(22)式が導かれ、システムノイズの推定値 $\hat{w}(k)$ の系列もまた互いに独立、すなわち白色となる。

観測ノイズの推定値は、(17), (18)式より、

$$\hat{v}(k)=(I-HK(k))\nu(k) \tag{23}$$

となるから、その平均値，共分散，ラグiの自己共分散は、

$$E\{\hat{v}(k)\}=0 \tag{24}$$

$$E\{\hat{v}(k)\hat{v}^T(k)\}=(I-HK(k))\Sigma_\nu(k)(I-HK(k))^T \tag{25}$$

$$E\{\hat{v}(k)\hat{v}^T(k+i)\}=0 \tag{26}$$

となる。観測ノイズの推定値の系列もまた白色である。

したがって、$\hat{w}(k)$, $\hat{v}(k)$ の白色性をチエックすることは、イノベーション $\nu(k)$ の白色性をチエックすることと等価である。

(6), (7)式が非線形の場合も、非線形フイルターを用いて同様にノイズの推定を行なうことができる。

5. モデルの検証・比較

3. において、確率過程的流出モデルの評価は、ノイズの統計的性質の検討によって行なうことを述べ、4. でノイズの推定法について述べた。ここでは、モデルの検証 (verification) の仕方に触れる。

モデルの仮定は、

$$E[w]=0 \;,\quad E[ww^T]=Q$$
$$E[v]=0 \;,\quad E[vv^T]=R \tag{27}$$

で、かつ $\{w\}$ と $\{v\}$ の各要素は互いに独立で $\{w\}$ も $\{v\}$ も白色正規系列であるということである。

ノイズの推定値の系列 $\{\hat{w}\}$, $\{\hat{v}\}$ がこれらの条件を満足すれば、そのモデルは一応妥当だとしてよい (ただし、Q, R の値がさらに小さいモデルを模索してモデルの精度を向上させるという課題はまだ残っている)。

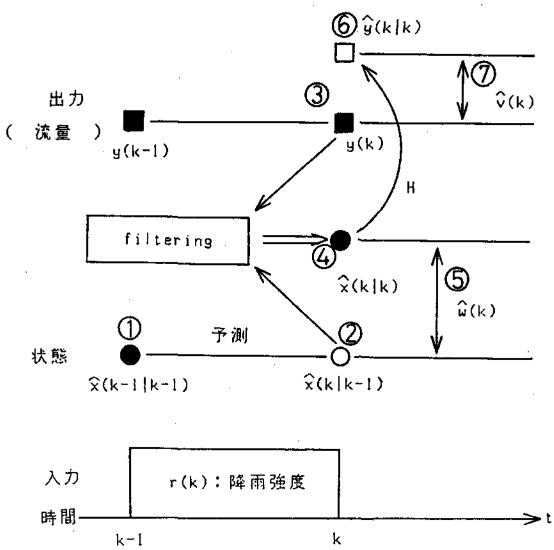
データ数を N として、

$$\bar{\hat{w}}=1/N\ \Sigma\hat{w} \;,\quad \hat{Q}=1/N\ \Sigma(\hat{w}-\bar{\hat{w}})(\hat{w}-\bar{\hat{w}})^T$$
$$\bar{\hat{v}}=1/N\ \Sigma\hat{v} \;,\quad \hat{R}=1/N\ \Sigma(\hat{v}-\bar{\hat{v}})(\hat{v}-\bar{\hat{v}})^T \tag{28}$$

や、$\{\hat{w}\}$ と $\{\hat{v}\}$ の共分散，それぞれの自己共分散を求めることができるので、これらが仮定を満たすかどうかを検定すればよい。ただし、同定期間だけでなく、検証期間においても仮定を満足しなければならない。

この検定にパスしないときは、i) パラメータ (初期値ももちろん含む) 推定が不十分である，または ii) モデル構造そのものが不十分であるので、モデル同定をやり直さなければならない。

ここまでの議論は、ある 1つのモデルの妥当性の評価についてであったが、このような検定にパスするようなモデルが複数個存在するとき、それらを選択するためにどのように比較・評価するかという問題がある。選択の基準としては、



図−1 ノイズの推定の手順

a) 精度がよい (すなわち、Q, R が小さい) こと

b) モデル構造が簡略で、パラメタ数が少ないこと

などが考えられるが、どちらを重視するかはモデルを用いる側の要求にもよる。どちらも満足するモデルを選択しようとするのは難かしい問題である。この問題を解決するための評価基準として有力であろうと考えられているものとして、AIC (赤池の情報量基準[5]) がある。このような基準の適用に関して今後さらに検討していきたい。

6. 結　論

洪水流出モデル，特に確率過程的流出モデルの評価法について基本的な考え方を概説した。モデル評価の問題はシステムの同定と深くかかわっており、"流出モデル"というからには、流出システムの物理性と不確定性とを正しく表現するようなモデルを構築することが重要である。従来のような出力の適合度を主たる基準とするような評価法では、流出モデルの妥当性を評価することは難かしい。流出モデルの評価の問題はかなり以前から議論されているにもかかわらず、未だに解決をみないのは、そのような評価法の限界を示唆するものであると考える。

今後、実流域のモデルへの適用を通じて、本講演で示した評価法を具体化していくつもりである。

参 考 文 献

1) 高棹琢馬・椎葉充晴：状態空間法による流出予測−kinematic wave 法を中心として−，京都大学防災研究所年報，第23号B-2, 1980, pp. 211-226.

2) 高棹琢馬・椎葉充晴・宝　馨：貯留モデルによる実時間流出予測に関する基礎的研究，京都大学防災研究所年報，第25号B-2, 1982, pp. 245-267.

3) 高棹琢馬：流出系の同定と予測，第18回水工学に関する夏期研修会講義集A-2, 土木学会水理委員会，1982.

4) たとえば、Gelb, A. (ed.), Applied Optimal Estimation, THE M.I.T Press, pp.317-318, 1974

5) たとえば、坂本・石黒・北川：情報量統計学，共立出版，1983.