

非均質地盤における波動伝播解析について

京都大学工学部 正員 丹羽義次

京都大学工学部 正員 廣瀬壮一

1. はじめに 近年、無限、あるいは半無限弾性地盤を対象として積分方程式法を用いた地震動解析が行なわれるようになったが、その大部分は、地盤を均質弾性体、あるいはその集合体として取り扱っているものである。しかしながら、実際の地盤は複雑な構造を有しており、特に原子力発電所などの重要構造物の建設においては、地盤の非均質性を考慮した解析が不可欠であると思われる。従来、積分方程式法によって非均質地盤の解析が行なわれなかった第一の理由は、一般に非均質弾性体に対する基本解を見出すことが容易ではなかったからであろう。そこで、この問題を解決するために、ここ数年来、均質弾性体に対する静弾性問題の基本解を用いて領域積分を容認した積分方程式を構成し、これによる非均質弾性体の解析も試みられている。さて、本研究においては、任意の非均質弾性体に対しては基本解が求められないものの、ある条件を満足する非均質弾性体に対してはその基本解が求められることに着目して境界積分方程式を構成し、堆積層のような非均質地盤を有する半無限地盤における二次元面外波動問題の解析を行なうものである。

2. 基礎式 等方・線形な非均質弾性体における二次元面外波動問題の支配方程式は、

$$\nabla \cdot (\mu(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) + \rho(\mathbf{x}) \omega^2 u(\mathbf{x}) = 0 \quad (1)$$

で与えられる。ただし、 $\mu(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$, ω , $u(\mathbf{x})$ は、それぞれ剛度、密度、角周波数、及び面外変位を表す。さて、任意の $\mu(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ に対して式(1)の基本解を求めることは困難であるので、次の条件を満たす非均質弾性体を考えることにする。

$$\mu(\mathbf{x})/\bar{\mu} = (x_2/\bar{x}_2)^a, \quad \rho(\mathbf{x})/\bar{\rho} = (x_2/\bar{x}_2)^{a-2} \quad (2)$$

ただし、 a は任意定数、 $\bar{\mu}$ は、基準となるべき定数を表す。式(2)より明らかのように、この時のせん断波速度 $C(\mathbf{x})$ は、

$$C(\mathbf{x})/\bar{C} = x_2/\bar{x}_2 \quad (\text{ただし } \bar{C} = (\bar{\mu}/\bar{\rho})^{1/2}) \quad (3)$$

となり、 $C(\mathbf{x})$ が x_2 方向に線形に変化する場合を解析することになる。

式(3)を式(1)に代入して整理すれば、

$$L[u] \equiv \nabla^2 u(\mathbf{x}) + \frac{a}{x_2} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \bar{k}^2 \left(\frac{x_2}{\bar{x}_2} \right)^2 u(\mathbf{x}) = 0 \quad (4)$$

となる。ただし、 $\bar{k} = \omega/\bar{C}$ である。なお、均質弾性体に対する支配方程式は、剛度、及び密度をそれぞれ一定値 μ_0 , ρ_0 として次式で与えられる。

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k_0^2 u(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{ただし、} k_0^2 = \omega^2 \rho_0^2 / \mu_0^2) \quad (5)$$

3. 非均質弾性体における積分方程式の定式化 Fig. 1 に示すように、境界 ∂D によって囲まれた内部領域 D を考え、 D において式(4)が満足されているものと仮定する。まず、基本解として、式(4)の随伴微分方程式、すなわち次式を満足する $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ を考える。

$$M[G] \equiv \nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{a}{x_2} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \right) + \bar{k}^2 \left(\frac{x_2}{\bar{x}_2} \right)^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (6)$$

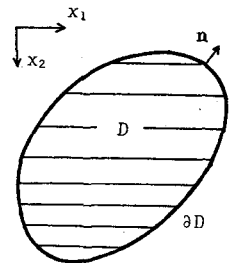


Fig. 1 領域及び境界

式(4)に $G(x, x')$ を乗じ、式(6)に $u(x)$ を乗じて辺々差し引き、ガウスの公式を用い、整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial D} \left\{ G(x', x) \frac{\partial u(x')}{\partial n'} - \frac{\partial G(x', x)}{\partial n'} u(x') \right\} ds_{x'} + \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial x_2} G(x', x) u(x') n_2' ds_{x'} \quad x \in D \\ 0 &= \int_{\partial D} \left\{ G(x', x) \frac{\partial u(x')}{\partial n'} - \frac{\partial G(x', x)}{\partial n'} u(x') \right\} ds_{x'} + \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial x_2} G(x', x) u(x') n_2' ds_{x'} \quad x \in D^c \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、 n' は境界上の点 x' における外向き単位法線ベクトル、 n_2' は n' の x_2 方向成分、 D^c は D の補領域を表す。次に、式(7)₂において $x \in D^c \rightarrow x \in \partial D$ なる極限操作を施せば、

$$\frac{1}{2} u(x) = \int_{\partial D} \left\{ G(x', x) \frac{\partial u(x')}{\partial n'} - \frac{\partial G(x', x)}{\partial n'} u(x') \right\} ds_{x'} + \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial x_2} G(x', x) u(x') n_2' ds_{x'} \quad x \in \partial D \quad (8)$$

となり、境界積分方程式が得られる。なお、ここでは詳細な説明を省略するが、式(6)を満たす無限領域における基本解 $G(x, x')$ は、次のように求められる。

$$G(x, x') = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x_2}{x_2'} \right)^{\alpha-1/2} Q_{\alpha-1/2} \left(\frac{r^2}{2x_2 x_2'} + 1 \right) \quad (9)$$

ここに、 $\alpha = (1+a)/2$ 、 $\nu^2 = ((1-a)/2)^2 - (k x_2')^2$ 、 $r = |x - x'|$ 、 Q_ν は ν 次第2種 Legendre 関数である。

4. 非均質地盤を含む半無限地盤の解析

ここでは、Fig. 2 に示すように、非均質地盤 D_2 を含む均質半無限地盤 D_0 に、入射波 u^i が入射した時の散乱問題を考えることにする。すなわち、 D_2 においては、式(4)が、 D_0 においては、式(5)が満たされていると仮定する。なお、境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} t_i(x) &= \mu(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0 \quad x \in \partial D_1, \partial D_3 \\ u_i(x) &= u_0(x), \quad t_i(x) = t_0(x) \quad x \in \partial D_2 \end{aligned} \quad (10)$$

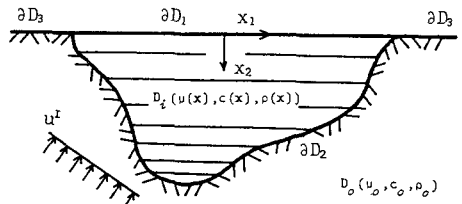


Fig. 2 解析モデル

領域 D_0 における積分方程式は、通常よく定式化されているように、半無限領域における基本解 $U(x, x') = \frac{1}{4} \cdot (H_0^{(1)}(k_0 r) + H_0^{(2)}(k_0 r))$ (ただし、 $r = (x_1 - x_1')^2 + (x_2 + x_2')^2$)^{1/2}、 $H_0^{(1)}$ は 0 次第 1 種 Hankel 関数である) を用いて、次のように得られる。

$$E(x) u(x) = u^i(x) + u^R(x) + \int_{\partial D_2} \left\{ U(x, x') \frac{\partial u(x')}{\partial n'} - \frac{\partial U(x, x')}{\partial n'} u(x') \right\} ds_{x'} \quad (11)$$

ここに、 $E(x) = 1 (x \in D_0, \partial D_3)$ 、 $1/2 (x \in \partial D_2)$ 、 $0 (x \in D_2, \partial D_1)$ であり、 $u^R(x)$ は、均質半無限地盤における反射波を表す。式(8)と式(11)₂を離散化し、境界条件(10)のもとで結合することにより、境界上の $u(x)$ 、及び $t(x)$ が得られ、式(7)₁と式(11)₁を用いて、領域内の変位が得られる。

5. 数値解析例

Fig. 3 は、 D_2 が半径 A の半円形であり、 $C(x)/C = \rho(x)/\rho = (x_2/A + 0.5)/1.5$ 、 $C_0/C = 2.0$ 、 $\rho_0/\rho = 1.0$ 、 $A/k_0 = 0.29$ 、平面波が鉛直下方から入射した場合の地表面上における変位振幅を示している。横軸は、原点を半円の中心にとり、半径 A で無次元化した x_1 座標を示している。この他の数値解析例など、詳細については当日発表する。

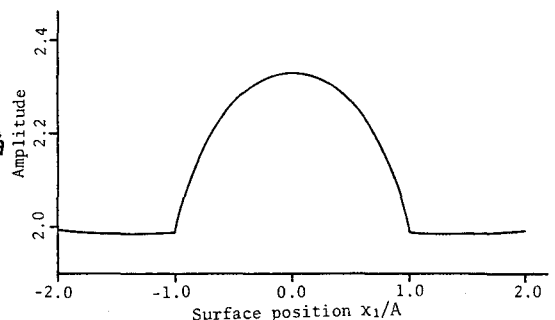


Fig. 3 地表面上における変位振幅