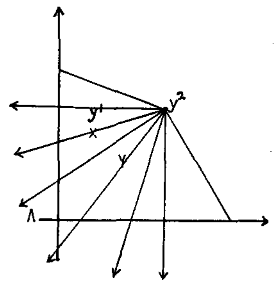
多目的計画法による最適設計について

京都大学工学部　正員　小林　昭一
京都大学工学部　正員　田村　武
京都大学工学部　学生員　○宮井　真一郎

1．はじめに

複数の目的関数をもつ線形問題の解を「非劣解」という。この種の問題は，単一目的関数の最適解を導くシンプレックス法の一般化といえる多目的シンプレックス法によって解くことができる。本論では，トラス構造の多目的設計問題を線形化し，この方法を用いてその非劣解を導く。



2．線形問題の非劣解

多目的線形問題を以下のように定式化する。

$$Cx \to \max \quad \text{subject to} \quad Ax \leqq b$$

決定空間 $X = \{ x \in R^n \mid Ax \leqq b,\ x \geqq 0 \}$

目的空間 $Y = \{ Cx \mid x \in X \}$

C：$l \times n$ 行列，A：$m \times n$ 行列，$b \in R^m$

ここで優越錐 Λ というものを与えて，$y^1, y^2 \in Y$ において「y^1 が y^2 に優越される」とは

$$y^1 \in y^2 + \Lambda \quad かつ \quad y^1 \neq y^2$$

と定義する。$y \in Y$ が目的空間 Y 内の y 以外のどの点に対しても優越されないとき，「y は非劣解」と定義する。同様に $x^1, x^2 \in X$ において x^1 が x^2 に優越されるとは

$$Cx^1 \in Cx^2 + \Lambda \quad かつ \quad Cx^1 \neq Cx^2$$

と定義する。同様に非劣解も定義する。

本問題は，$\Lambda = \Lambda^{\leqq} = \{ \lambda \mid \lambda \leqq 0 \}$ つまり l 次元空間の非正象限の優越錐に対する非劣解を導く問題となり，特にこのような非劣解をPareto解という。非劣解の集合を N，それ以外の解の集合を D とする。ここで $X^0(\lambda) = \{ x^0 \in X \mid \lambda C x^0 \geqq \lambda C x,\ x \in X \}$ とおくと次の定理がなりたつ。（Λ^*：双対錐，$\mathrm{Int}\,\Lambda$：相対的内部）

$$\cup \{ X^0(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Int}\,\Lambda^* \} \subset N \subset \cup \{ X^0(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda^*,\ \lambda \neq 0 \} \qquad (2-1)$$

特にPareto解においては次のように表わせる。

$$N = \cup \{ X^0(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Int}\,\Lambda^* \} = \cup \{ X^0(\lambda) \mid \lambda > 0 \} \qquad (2-2)$$

以降は簡略化のために非劣解がPareto解をなす場合に限定して論述する。

3．多目的シンプレックス法

$X^0(\lambda)$ はシンプレックス法を用いて解くことができ，(2－2)の定理から，ベクトル λ を l 次元空間の正象限内で変化させることによって非劣解の集合 N が導ける。この方法は合理的なようだが，λ を変化させる方法が確定しておらず，計算量が多大なため最良の方法とはいえない。代わりの方法として多目的シンプレックス法がある。これは多目的シンプレックス表として，各目的関数を対等に並べて判断を下す方法である。

Shoichi Kobayashi　Takeshi Tamura　Shinichiro Miyai

本問題において$X^0(\lambda)$を導くシンプレックス表（TableauⅠ）と多目的シンプレックス表（TableauⅡ）を下に掲げる。

TABLEAU I

R	Basis	C	$X_1 \cdots X_m$	$X_{m+1} \cdots X_j \cdots X_{m+n}$	X
			$C_1 \cdots C_m$	$C_{m+1} \cdots C_j \cdots C_{m+n}$	
1	X_1	C_1	$1 \cdots 0$	$Y_{1m+1} \cdots Y_{1j} \cdots Y_{1m+n}$	Y_{10}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
M	X_m	C_m	$0 \cdots 1$	$Y_{mm+1} \cdots Y_{mj} \cdots Y_{mm+n}$	Y_{m0}
			$0 \cdots 0$	$Z_{m+1} \cdots Z_j \cdots Z_{m+n}$	V

TABLEAU Ⅱ

R	Basis	$X_1 \cdots X_m$	$X_{m+1} \cdots X_j \cdots X_{m+n}$	X
1	X_1	$1 \cdots 0$	$Y_{1m+1} \cdots Y_{1j} \cdots Y_{1m+n}$	Y_{10}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
M	X_m	$0 \cdots 1$	$Y_{mm+1} \cdots Y_{mj} \cdots Y_{mm+n}$	Y_{m0}
		$0 \cdots 0$	$Z^1_{m+1} \cdots Z^1_j \cdots Z^1_{m+n}$	V^1
		⋮	⋮	⋮
		$0 \cdots 0$	$Z^L_{m+1} \cdots Z^L_j \cdots Z^L_{m+n}$	V^L

4．非劣解サブルーチン

多目的シンプレックス表において与えられた実行可能基底解が，非劣解かどうかを各目的関数のシンプレックス基準から判断できることもあるが，全ての場合を網羅しつくしてはいない。残りの場合に判断を下せる「非劣解サブルーチン」という方法がある。それは実行可能基底解をx^0として次のような線形問題を解くことである。

$$w = \sum_{i=1}^{\ell} e_i \rightarrow \max \qquad \text{subject to} \quad x \in X,\ Cx - e = Cx^0,\ e \geqq 0,\ e \in R^{\ell}$$

非劣解の概念から以下のことは明らかである。

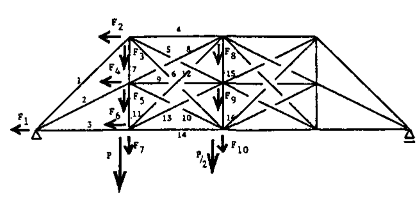
$$w = 0 \iff x^0 \in N \quad , \quad w > 0 \iff x^0 \in D$$

この問題はシンプレックス法を用いて解け，そのシンプレックス表は，もとの問題における多目的シンプレックス表（TableauⅡ）を用いて極めて容易に構成できる。

5．非劣解の集合Nの導き方

Nはその中に含まれる端点の集合N_{ex}の凸包に含まれる。よってN_{ex}を導くことがNを導く重大な手がかりとなり，本論ではN_{ex}を導く。

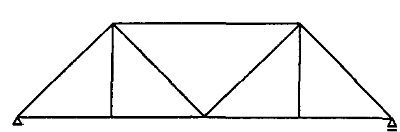
N_{ex}の要素は互いに連続である。この性質から，N_{ex}の要素を1個見つけ，その隣接点を多目的シンプレックス法で判断していくことによって，必ずしも全ての端点を見なくともN_{ex}を導ける。



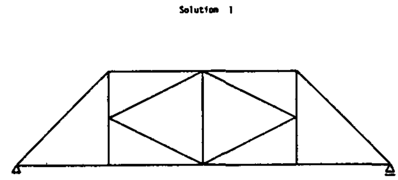
6．トラス設計の例題

部材力を変数，釣合式を制約条件，重量・コストの最小化を目的関数とした，荷重対称・構造対象のトラスの最適設計問題を扱う。

各部材に用いる材料は，重くて安いものから軽くて高いもの3種類の中から決めておく。この例題では2個の非劣解が得られた。なお，詳細な計算方法・結果の報告・検討等は当日発表する。



Solution 1



Solution 2

〈参考文献〉

1) P. L. Yu and M. Zeleny Journal of Mathematical Analysis and Applications 49, 430-468 (1975)
"The Set of All Nondominated Solutions in Linear Cases and a Multicriteria Simplex Method"

2) P. L. Yu Journal of Optimization Theory and Applications Vol.14, No.3 (1974)
"Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives"