双対定理を利用した構造物の最小重量設計

京都大学工学部　正員　小林昭一
京都大学工学部　正員　田村　武
京都大学大学院　学生員　平松祐之

1. はじめに

構造物を設計する際において重要な問題は，構造が十分な強度を有し，かつ最も経済的であることである。そこで本報文では強度に関しては，設計対象とする構造物の各部材の応力および指定した節点変位が許容値以下になること，そして経済的なこととして最も軽くなる最小重量設計を考える。具体的には対象構造物を静定トラスとし，応力および変位を制約条件として総重量を最小化する問題(主問題)を考える。変数は各部材の断面積Aで，制約条件がAに関する非線形関数となるため解法として非線形計画法(NLP)を用いることになる。本報文では，この主問題を解き，さらに問題の凸性を利用して双対問題を定義し，最小重量の上・下界を求めることにより解の精度を検討する。

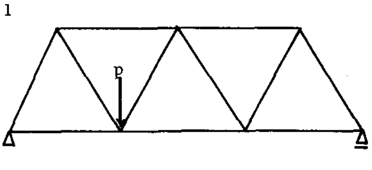
2. NLPの利用

NLPは，線形計画法(LP)と異なり一般的解法はない。しかし用いる関数がすべて凸関数となる場合，凸計画問題となりTaylor展開によって非線形関数を近似線形化することを基本とした支持超平面法[2]が有効となる。さらに最大の利点としてSlater[3]の制約想定が成立するとき双対性が存在することから主問題の解をLagrange乗数を変数とする双対問題の最適解としても得ることができる。つまり主・双対問題の2つの解を比較検討することで得た解が妥当であるかないかを推定しやすくなる。この点を考慮し本報文では扱う関数がすべて凸関数となる場合のみを考える。すなわち主問題での目的関数となる総重量関数は断面積の非負係数による線形関数であり，応力条件も係数が非負であるので凸関数である。さらに変位条件も各変数の係数が非負になれば凸関数になるので，以下のような変位制約とする。

{トラスに作用する各荷重系で，実効荷重はトラス節点上に載荷される単一の集中荷重で，その節点の鉛直方向変位に許容値を設定する。(fig.1参照)

こうすることで係数は必ず非負となり全体として凸計画問題となる。

fig.1



3. 主・双対問題の定式化

まず主問題の定式化を示すと，

object function　$W = \sum_{i=1}^{N} \rho L_i A_i$ ---------- mim

subject to

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{F_{ki} U_{ki} L_i}{E \quad \delta_k} \right) \frac{1}{A_i} - 1 \leqq 0 & (変位) \quad k=1,2,\cdots M \\ \frac{\bar{A}_i}{A_i} - 1 \leqq 0 & (応力) \end{cases} \quad \text{----------- (1)}$$

N：部材数　L_i：部材長
ρ：部材密度　A_i：断面積
δ_k：節点kの最大許容変位

F_{ki}：荷重P_kで発生する部材iの部材力　U_{ki}：節点kにδ_k方向の変位を与える単位荷重によって発生する部材iの仮想部材力
E：ヤング係数

(1)式のF_{ki}とU_{ki}は2.で述べた変位制約内容によって同符号となり係数は非負となる。

Shoichi KOBAYASHI, Takeshi TAMURA & Masayuki HIRAMATSU

問題は凸計画となっているので支持超平面法[2]を用いる。この手法は制約条件をTaylor展開の1次の項で線形化することでLPの導入を可能にし，双対単体法によって最適解を求めていく。Taylor展開による近似線形式は超平面を表し，凸計画では，この超平面が実際の実行可能領域を切り取らない。これがこの手法で解を得られる最大の理由である。
主問題は，目的関数を最小化する min max 問題であるが，双対性の存在により最適解がLagrange関数 $L(A,\lambda)$ の鞍点となり，この $L(A,\lambda)$ を λ の関数として最大化する max·min 問題にもなる。

以下に双対問題の定式化を示すと，

$$\begin{cases} L(A,\lambda) = g(A) + \lambda_1 g_1(A) + \lambda_2 g_2(A) + \cdots\cdots + \lambda_M g_M(A) + \cdots + \lambda_{M+N} g_{M+N}(A) \quad \cdots\cdots\cdots (2) \\ g_1, \cdots g_M \text{ は(1)式の変位制約} \quad g_{M+1}, \cdots g_{M+N} \text{ は(1)式の応力制約} \quad g \text{ は重量関数} \\ \lambda_1, \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_{M+N} \geqq 0 \end{cases}$$

双対問題では，単にLagrange乗数 λ_i の非負条件があるにすぎない。その解法としては，まず $L(A,\lambda)$ を変数 A_i に関し最小にする。つまり

$$\frac{\partial L(A,\lambda)}{\partial A_i} = 0 \quad \cdots\cdots (3)$$

を求める。

さらに(3)式により各断面積 A_i が λ_i の非線形関数として求められる。この関数を(2)式の $L(A,\lambda)$ に代入することで，この関数を λ_i だけの非線形関数 $w(\lambda)$ に変換する。次にこれを λ_i のもとで最大化する。この場合，目的関数となる $w(\lambda)$ が非線形なのでNLPの手法が必要となる。その手法としては，本報文では縮小勾配法[4]を用いるが，λ_i に関する制約条件がないため基底変数部が存在しないので解析は少し容易である。

4. 計算結果

支持超平面法および縮小勾配法から主問題解Pおよび双対問題解D(fig2参照)を求める。主問題では近似の可能領域は実際よりもわずかに大きいので双対単体法で得た解は，実行可能域のわずかに外側になる。本報文では，この外側の解をさらに近傍で可能境界上，わずかに内側になるように再移動させて解Pとしている。この移動点が鞍点ならば，

$P = D$ 　となり両者は一致する。しかし実際はTaylor展開等の近似を用いた部分での誤差があり，鞍点にならない。一般に実行可能領域内で鞍点でなければ，

$P \geqq D \cdots (4)$ 　が成立する。したがってPとDの値がほぼ同じで，(4)式を満足するならば，得られた結果は妥当であると判断できよう。

右に計算結果例を示す。(fig3, 表1 参照)

＊トラスは対称であるとして計算している。

fig.2

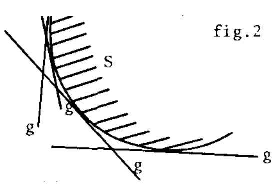
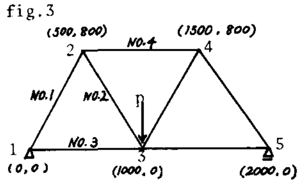


fig.3



表·1

	MIN-SIZE (cm²)	PRIMAL AREA	DUAL AREA	ALOWABLE STRESS (Kg·cm⁻²)
NO.1	36.871	36.881	36.968	160
NO.2	32.757	36.326	34.646	180
NO.3	17.361	17.692	18.362	180
NO.4	39.062	39.157	39.14	160
	WEIGHT	1488.538	1476.886	

E=1500000 (Kg·cm⁻²) DENSITY=0.007 (Kg·cm⁻³)
LOAD= 10000 (Kg) ---(POINT 3)
DISPLACEMENT CONSTRAINT
POINT 3 0.38 (cm)

参考文献 --- 1) 大久保禎二・坂本良文，土木学会講演概要集 I-286(1981)
2) 今野浩・山下浩，「非線形計画法」，日科技連，12 (1978)
3) 久志本茂，「最適化問題の基礎」，数学ライブラリー，5 (1978)
4) 刀根薫，「数理計画」，基礎の数学，4 (1978)