

動的最適性規準を用いた構造物の形状決定に関する一研究

京都大学工学部 正員 山田善一 山口大学工学部 正員 古川浩平
(株)片山鉄工所 正員 ○城戸一郎 京都大学大学院 学生員 下司弘之

1. まえがき

従来の最適設計においては、断面の最適化に関する研究が多く、形状最適化に関する研究は少ない。しかし、形状の最適化は断面最適化より上位に位置し、その影響はより大きいものと考えられる。非線形計画法を用いた最適化で断面と形状の両者を考慮すれば、収束するまでに莫大な繰返し回数を必要とし実用的でない。本研究は、この問題点を動的最適性規準を応用することにより、解決することを試みたものである。

2. 形状に関する動的最適性規準の定式化

構造物の固有値が与えられた許容固有値 λ_a となる最小重量構造物は目的関数 W と等号制約 $\lambda - \lambda_a = 0$ より形成される次式のラグランジュ関数の停留値を求めることにより得られる。

$$L = \sum A_i L_i \rho_i + \frac{1}{\mu} (\lambda - \lambda_a) \rightarrow \min \quad (1)$$

λ はレイリー商を用いると $\lambda = \mathbf{X}^t \mathbf{M} \mathbf{X} / \mathbf{X}^t \mathbf{K} \mathbf{X}$ と表わすことができる。 $\frac{\partial L}{\partial L_i} = 0$ より μ を求め、それぞれ μ_i とおくと

$$\mu_i = \frac{\mathbf{X}^t \mathbf{K}_i \mathbf{X} + \lambda \mathbf{X}^t \mathbf{M}_i \mathbf{X}}{A_i L_i \rho_i \mathbf{X}^t \mathbf{M}_i \mathbf{X}} \quad (2)$$

式 (2) において $\mathbf{X}^t \mathbf{K}_i \mathbf{X}$ の絶対値は $\lambda \mathbf{X}^t \mathbf{M}_i \mathbf{X}$ のそれにくらべて 1/100 程度以下であり、無視することができる。この μ_i を全部材について等しくすることが動的の問題における最適性規準である。

3. 等変位下における形状最適化

前式に示した μ_i を等しくすることと、 μ_i を次式により変形したものを等しくすることは同値である。すなわち、

$$\mu_i = \max \left(\frac{\mathbf{X}^t \mathbf{K}_i \mathbf{X} + \lambda \mathbf{X}^t \mathbf{M}_i \mathbf{X}}{A_i L_i \rho_i \mathbf{X}^t \mathbf{M}_i \mathbf{X}} \right) - \frac{\mathbf{X}^t \mathbf{K}_i \mathbf{X} + \lambda \mathbf{X}^t \mathbf{M}_i \mathbf{X}}{A_i L_i \rho_i \mathbf{X}^t \mathbf{M}_i \mathbf{X}} \quad (3)$$

各部材の変化量を次のようにおく。

$$\delta L_i = \alpha (\mu_i - \bar{\mu}) + \beta \mu_i \quad (4)$$

ここに、 α 、 β 、 μ は後に定める定数である。固有値の総変化量 $\delta \lambda$ は

$$\delta \lambda = \alpha \left(\sum A_i \rho_i \mu_i^2 - \bar{\mu} \sum A_i \rho_i \mu_i \right) + \beta \sum A_i \rho_i \mu_i^2 \quad (5)$$

A_i : 部材断面積

L_i : 部材長

ρ_i : 比体積重量

λ : 固有値

λ_a : 許容固有値

$\frac{1}{\mu}$: ラグランジュ乗数

$\mathbf{X}$: 注目点の動的変位

$\mathbf{X}_a$: 注目点の許容変位

$\mathbf{X}$: 動的変位ベクトル

$\mathbf{M}_i$: 質量マトリックス

$\mathbf{K}$: 剛性マトリックス

$\mathbf{M}_i$: i 要素のみの値の入った質量マトリックス

$\mathbf{K}_i$: i 要素のみの値の入った剛性マトリックス

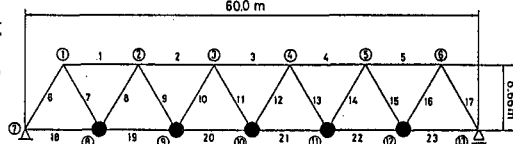


Fig. 1 計算モデル

初期値:		重量	$W_0 = 36.119$ t	
		動的変位	$X_d = 2.757$ cm	
		断面積	$A_0 = 0.02$ m ²	
許容変位 X_a cm	重量 t	動的変位 cm	けた高 m	収束回数
1.0	45.763	1.005	17.260	10
2.0	36.539	2.005	10.872	11
3.0	33.692	3.001	8.906	12
5.0	31.688	5.003	7.360	10
8.0	31.011	7.774	5.925	40

Table 1 各ケースの重量, けた高および収束回数

α は定数であり、次式のように与える。

$$\alpha = \max[0.3\eta L_i / (\mu_i - \bar{\mu})] \quad (6)$$

ここに $\eta = \sqrt{\sum (\mu_i - \bar{\mu})^2 / m} / \bar{\mu}$ は μ_i のばらつきを現す。

δL_i による固有値の総変化量は、式 (5) の右辺第二項のみによって表わされ、次式で求められる。

$$\delta \lambda = \beta \sum A_i \rho_i \mu_i^2 = \delta \lambda_0 \quad (7)$$

$\delta \lambda_0$ は各設計サイクルにおいて変化すべき固有値の総変化量であり、 $\delta \lambda_0 = \lambda (X_1 / X_a - 1)$ である。

これにより β は、 $\beta = \delta \lambda_0 / \sum A_i \rho_i \mu_i^2$ となり、部材長の変化量は、

$$\delta L_i = (\delta \lambda_0 / \sum A_i \rho_i \mu_i) \mu_i + \alpha (\mu_i - \bar{\mu}) \quad (8)$$

となるが、各部材が自由に部材長変化をしたのではトラス構造物として整合がとれない。そこで節点 k の移動量を次のように定める。

$$\delta X_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta L_i \cos \vartheta_i, \quad \delta Y_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta L_i \sin \vartheta_i \quad (9)$$

結局、各部材は次式で与えられる。

$$L'_i = \sqrt{(X_{i,1} + \delta X_{i,1} - X_{i,2} - \delta X_{i,2})^2 + (Y_{i,1} + \delta Y_{i,1} - Y_{i,2} - \delta Y_{i,2})^2} \quad (10)$$

ここに、 $X_{i,1}$ は i 部材の左節点であり、 $X_{i,2}$ は右節点である。

4. 数値計算例および考察

計算例として Fig.1 にしめす下弦材の各節点に 50ton の荷重を載荷する。入力地震波の最大加速度は 200gal とし、部材断面積を $A_i = 0.02\text{m}^2$ (一定) とした。

$X_a = 1.0\text{cm}, 2.0\text{cm}, 3.0\text{cm}, 5.0\text{cm}, 8.0\text{cm}$ の 5 種の許容変位について最適形状を求めた。最適形状を Fig.2 に、重量および桁高を Table1 に示す。断面積一定としているので許容変位の差は収束形状の桁高の差として表われている。 $X_a = 2.0\text{cm}$ と 5.0cm について、その重量と変位、および η の収束状況を Fig.3 に示す。図中 η として示す点は、両端の 4 本の斜材を η の計算から除外して得られる値を示している。

5. 結論

本設計法の収束性は非常に速く、最適化に要する計算時間は非常に短い。またワレントラス橋に適用した結果は、タイドアーチ橋に類似した形状に収束するものと考えられる。

参考文献

山田善一，古川浩平，横田建一：動的荷重下における変位を制約とする最適性規準に関する研究，土木学会論文報告集，第 324 号，1982 年 8 月

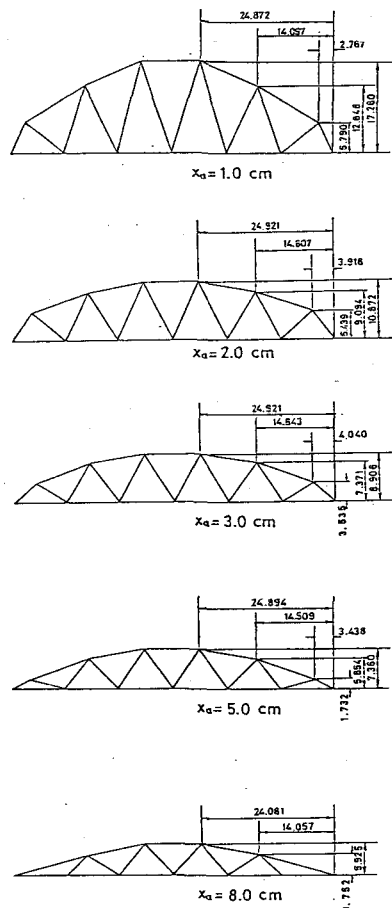


Fig. 2 各ケースの最適形状

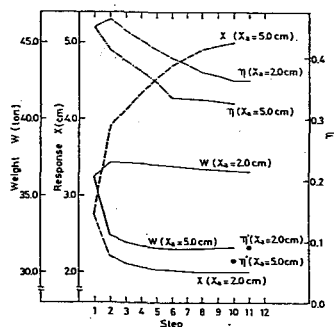


Fig. 3 重量および変位の収束状況