

初期不変を有し面内荷重を受ける板の混合法による弾塑性有限変位解析

大阪大学工学部 正員 小松 定夫
大阪大学工学部 正員 奈良 敬
大 阪 市 正員 ○山口 博章

1 まえがき 一般に変分原理に基づく有限要素法は、採用する変分原理により変形法混合法および応力法に大別される。これらを弾塑性有限変位解析に適用するため、各変分原理の汎関数を増分形で誘導し、結果、応力法に十分有利な点がないことが判明した。そこで、面内組合せ荷重を受ける板を対象として混合法による弾塑性有限変位解析プログラムを作成した。また、要素境界上における連続条件を緩和したハイブリッド型の変形法と混合法について同様の解析プログラムを作成し、従来の変形法による解析法¹⁾と併せて、4種類の解析法について比較検討を行った。この報告する。

2 解析法 (1) 要素剛性マトリックスの誘導 変形法(以下DMと呼ぶ)と混合法(MM)、並びにハイブリッド型の変形法(HDM)と混合法(HMM)の汎関数の停留条件より各々の要素剛性マトリックス k_e^{DM} , k_e^{MM} , k_e^{HDM} , k_e^{HMM} が求まる。

$$k_e^{HDM} = \begin{bmatrix} k_{ss} & k_{sb} + k_{bs} \\ k_{bs} + k_{ss}^T & k_{bb} + k_{ss} + k_{bb} \end{bmatrix}, \quad k_e^{HMM} = \begin{bmatrix} H_{ss}^T H_s^{-1} H_{ss} & H_{ss}^T H_s^{-1} (H_h + H_{db}) \\ (H_h + H_{db})^T H_s^{-1} H_{ss} & (H_h + H_{db})^T H_s^{-1} (H_h + H_{db}) + k_G \end{bmatrix}$$

k_e^{DM} は k_e^{HDM} において $k_{ss} = 0$, $k_{bb} = 0$ と置くことにより、 k_e^{MM} は k_e^{HMM} において $H_h = 0$ とおくことにより得られる。このとき、

$$k_{ss} = \sum_{j=1}^3 \left\{ B_{sj}^T n_j^* n_j (A_{sj} - A_{sj}^*) d s \right\}, \quad k_{bb} = \sum_{j=1}^3 \left\{ B_{bj}^T n_j^* n_j (A_{bj} - A_{bj}^*) + (A_{bj} - A_{bj}^*)^T n_j^* n_j B_{bj} \right\} d s \quad (2)_{1,2}$$

$$H_s = \int_{V_m} S^T D_{ep} S dV, \quad H_{ss} = \int_{V_m} S^T D_{ep} B_u dV, \quad H_{db} = - \int_{V_m} z S^T D_{ep} A_{\phi} dV, \quad H_h = \sum_{j=1}^3 \left\{ B_{sj}^T n_j^* n_j (A_{sj} - A_{sj}^*) d s \right\} \quad (3)_{3-4}$$

$$B_{sj} = \int_z z D_{ep} B_u dz, \quad B_{bj} = \int_z z^2 D_{ep} A_{\phi} dz, \quad B_{sj}^* = \int_z z D_{ep} S_j dz, \quad n_j = \{ \cos \alpha; \sin \alpha \}_j, \quad n_j^* = \{ \cos^2 \alpha; \sin^2 \alpha; 2 \sin \alpha \cos \alpha \}_j \quad (4)_{5}$$

式(2)~(4)中の添字 j は図-1に示すように要素境界辺 j を表す。その他の記号については文献(1)を参照のこと。なお、混合法における応力場は次式のようによりずみで表現している。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \alpha_1 + \alpha_2 L_1 + \alpha_3 L_2 + z(\alpha_4 + \alpha_5 L_1 + \alpha_6 L_2), & \gamma_{xy} &= \alpha_{13} + \alpha_{14} L_1 + \alpha_{15} L_2 + z(\alpha_{16} + \alpha_{17} L_1 + \alpha_{18} L_2) \\ \epsilon_y &= \alpha_7 + \alpha_8 L_1 + \alpha_9 L_2 + z(\alpha_{10} + \alpha_{11} L_1 + \alpha_{12} L_2) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

即ち $\epsilon = S \beta$ とされ、 L_1, L_2 は面積座標

また、要素境界での変位および表面力付線形補間する。(2) 不釣り合い力の算定 不釣り合い力の算定は文献(1)と同じ方法を用いた。即ち、Murray-Wilsonの移動座標の概念に基づき剛体変位を除き、求めた真の節点変位増分のみを計算した。これにより、混合法の場合真の節点変位増分のみを一般化し、すなわち増分を求めた過程が生じ、さらにその過程において応力-ひずみマトリックスを再計算する必要があり、従って、計算手順が複雑となる。

3 数値計算例 材料はのみを有し純圧縮荷重を受ける単純支持正方形板の極限強度について、要素分割と精度の関係を調べた結果を表-1に示す。材料はのみ量は板厚の $1/10$ (等 $= 0.1$)、幅厚比 $b/t = 48$ ($b = 48 \text{ cm}$, $t = 1 \text{ cm}$)、降伏応力 $\sigma_y = 6000 \text{ kg/cm}^2$ である。極限強度は平均圧縮応力 σ の最大値 $\bar{\sigma}_{max}$ を σ_y で無次元化した値を示す。この表から、HDMとHMMは

別な側面から収束するのに対して、DMとMMは柔質側面から収束している。これは、DMとMMにおいて、変位場が要素境界上と不連続となり非適合要素を用いているためと思われる。しかしこれによって、各解析法による収束性が大変良好であり、要素分割の大小において誤差1%以内に収まっている。次に表-1と同じ解析モデルについて弾性有限変位解析を行い、その結果とCoanの級数解²⁾との比較を表-2に示す。表中、 P は圧縮荷重、 P_c は線形弾性座屈荷重、数値は荷重レベルが $\frac{P}{P_c}$ の時の板中央のたわみと板厚を無次元化した値、()内の数字はCoanの級数解を基準としたたわみの誤差を百分率で表わす。これより、ハイブリッド型クレック法が精度および計算コストの面で優れていることがわかる。また、長

表-1 要素分割と精度

Mesh	3x3	4x4	5x5	6x6
DM	0.627	0.629	0.629	0.630
HDM	0.633	0.632	0.630	0.630
MM	0.627	0.628	0.628	0.629
HMM	0.635	0.633	0.631	0.631

表-2 級数解との比較

方形適合要素を用いた変形法によればCoanの級数解より別な側面の結果と与えることが報告されている。³⁾ 計算時間と比較すると、HMMとMMはHDMとDMの約2.5~3倍となるが、ハイブリッド型にすることが計算時間の増加は僅かである。ここではHDMを用いて、他の計算例を示すことにする。図-2に、面内曲げ圧縮荷重を受ける同辺単純支持板について、Walker⁴⁾の行った実験と比較した結果を示す。板の加工誤差に比べて実験のため境界条件が、よりしているため、解析結果と実験結果はよく一致している。次に終せん断荷重を受ける板について、Harding⁵⁾の弾塑性有限変位解析法による計算例と比較した結果を図-3に示す。Hardingらはvon Misesの降伏条件とPrandtl-Reussの塑性流れ則に基づいているが、FEMでは広くDynamic Relaxation法を用いているが、この本法とは異なる。解析モデルは同辺単純支持の正方形板で、各辺において垂直力の合力が0となるようなものがある。両者の解析結果はよく一致している。板厚比 $\frac{b}{t} = 180$ の場合には、板厚強度の差は0.4%である。

P/P _c	Coan	DM	HDM	MM	HMM
0.991	0.742	0.768 (3.5)	0.753 (1.5)	0.768 (3.5)	0.745 (0.4)
1.055	0.862	0.892 (3.5)	0.876 (1.6)	0.892 (3.5)	0.867 (0.6)
1.119	0.981	1.010 (3.0)	0.995 (1.4)	1.010 (3.0)	0.987 (0.6)
1.254	1.214	1.240 (2.1)	1.229 (1.2)	1.240 (2.1)	1.221 (0.6)
1.402	1.441	1.468 (1.9)	1.456 (1.0)	1.468 (1.9)	1.450 (0.6)
1.563	1.662	1.689 (1.6)	1.677 (0.9)	1.689 (1.6)	1.670 (0.5)
1.737	1.875	1.904 (1.5)	1.892 (0.9)	1.904 (1.5)	1.886 (0.6)

Mesh 3x3 () ; $(w-w_c)/w_c \times 100 \%$

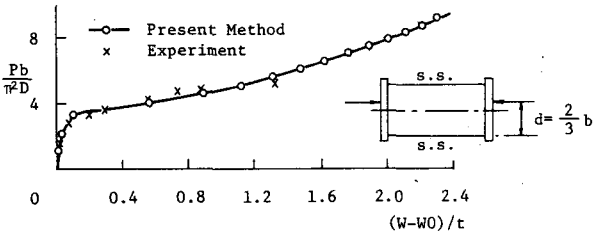


図-2 面内曲げ圧縮を受ける板

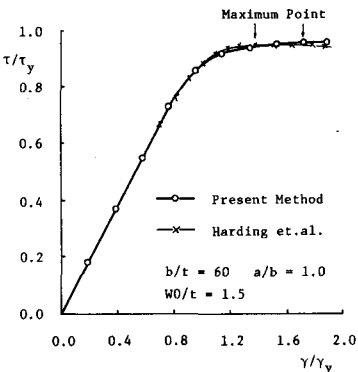


図-3 せん断荷重を受ける板

参考文献 1) 小松、北田、宮崎：土木学会論文報告集，第244号，1975年。2) Coan, J.M.: J. of Applied Mech., Vol. 18, No. 2, 1951. 3) 小松、小松、寺根：第36回年報，I-133, 1974年。4) Walker, A.C.: Thin Walled Structures, 1967. 5) Harding, J.F., R.F. Hobbs, B.G. Neal: Proc. of ICE, 1977.