

走行荷重による Mindlin Plate の動的性状

大阪市立大学 正員 園田 恵一郎
 “ “ 小林 治俊
 兵庫県 “ 〇 窪川 美樹

[1] まえがき 走行荷重による平板の動的挙動に関する研究は古くから行なわれている。解析には、通常薄板理論が用いられ^{1,2)}、動的挙動に及ぼすせん断変形および回転慣性の影響は考慮されていない。平板の静的曲げ解析において、板厚/スパン比が大きくなれば、せん断変形の影響を無視出来ないことはよく知られた事実であり、動的解析においてより顕著にその影響が表われることが予想される。現在のところ、せん断変形を考慮した動的解析は、shirakawa³⁾による Ambartsumyan 理論を用いた四辺単純支持板の解析が見られるだけである。本研究では、Mindlin 理論を用いた相対二辺単純支持他の二辺が自由な平板上の線荷重が移動する場合平板の動的性状が、(1) 板厚/スパン比 (2) 走行速度 (3) 板の減衰率によりどのように影響をうけるかを調べた。なお今回の解析では回転慣性の影響は考慮していない。

[2] 解析法 図1に、平板の形状と座標系を示す。

強度を幅2 h の線荷重が一定速度 v で x 軸上を移動

するものとする。板の減衰を含めた支配式は、

$$L_1(w, \psi_x, \psi_y) = 0 \dots (1) \quad L_2(w, \psi_x, \psi_y) = 0 \dots (2)$$

$$L_3(w, \psi_x, \psi_y) + \rho h \ddot{w} + 2\beta \rho h \dot{w} = q(x, y, t) \dots (3)$$

ここで、

$$L_1 = \frac{D}{2} \{ (1-\nu) \nabla^2 \psi_x + (1+\nu) \frac{\partial \phi}{\partial x} \} + \kappa G h \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right),$$

$$L_2 = \frac{D}{2} \{ (1-\nu) \nabla^2 \psi_y + (1+\nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} \} + \kappa G h \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right), \quad L_3 = \kappa G h (\phi - \nabla^2 w) \dots (4)$$

また、 $\phi = \partial \psi_x / \partial x + \partial \psi_y / \partial y$, $\nabla^2 = \text{Laplacian}$, $w = \text{たわみ}$, $\psi_x, \psi_y = x, y$ 軸方向の回転角, $D = \text{板剛度}$, $G = \text{せん断弾性係数}$, $\nu = \text{ポアソン比}$, $h = \text{板厚}$, $\rho = \text{板密度}$, $\kappa = (5/6) = \text{せん断修正係数}$, $\beta = \text{減衰係数}$, $\dot{} = \partial / \partial t$, $\ddot{} = \partial^2 / \partial t^2$, $t = \text{時間}$.

式(1)~(3)を、慣性力項、減衰力項を無視した場合の解(弾静的解) w^s, ψ_x^s, ψ_y^s と、それらを考慮した解(動的解) w^d, ψ_x^d, ψ_y^d とに分離させて解くことを考える。即ち、

$$w = w^s + w^d, \quad \psi_x = \psi_x^s + \psi_x^d, \quad \psi_y = \psi_y^s + \psi_y^d \dots (5)$$

とおけば、弾静的解に対する支配式は、

$$L_1(w^s, \psi_x^s, \psi_y^s) = 0, \quad L_2(w^s, \psi_x^s, \psi_y^s) = 0, \quad L_3(w^s, \psi_x^s, \psi_y^s) = q(x, y, t) \dots (6)$$

であり、動的解に対する支配式は、式(5)(6)を式(1)~(3)に代入することにより次式となる。

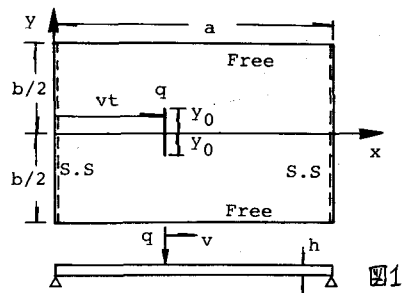
$$L_1(w^d, \psi_x^d, \psi_y^d) = 0, \quad L_2(w^d, \psi_x^d, \psi_y^d) = 0, \quad L_3(w^d, \psi_x^d, \psi_y^d) + 2\beta \rho h \dot{w}^d + \rho h \ddot{w}^d = -2\beta \rho h \dot{w}^s - \rho h \ddot{w}^s \dots (7)$$

さて、式(6)の弾静的解に回転慣性を無視した Mindlin Plate の固有函数⁴⁾ $W_{mn}(x, y), \Psi_{x,mn}(x, y), \Psi_{y,mn}(x, y)$

$$\{ w^s, \psi_x^s, \psi_y^s \} = \sum_m \sum_n a_{mn}(t) \{ W_{mn}(x, y), \Psi_{x,mn}(x, y), \Psi_{y,mn}(x, y) \}$$

$$q(x, y, t) = \sum_m \sum_n b_{mn}(t) W_{mn}(x, y), \quad b_{mn}(t) = q b_{mn}^* \sin(m\pi vt/a), \quad b_{mn}^* = \int_0^{2h} Y_{mn}(y) dy / \int_0^{2h} \int_0^a Y_{mn}^2(y) \sin^2 \frac{m\pi x}{a} dx dy$$

$$W_{mn}(x, y) = Y_{mn}(y) \sin(m\pi x/a), \quad \Psi_{x,mn}(x, y) = \psi_{x,mn}(y) \cos(m\pi x/a), \quad \Psi_{y,mn}(x, y) = \psi_{y,mn}(y) \sin(m\pi x/a) \dots (8)$$



式(8)を式(6)に代入すれば、未定係数 $a_{mn}(t)$ が決定される： $a_{mn}(t) = \frac{qa^3}{D} \frac{b_{mn}^*}{\lambda_{mn}^4} \sin(\frac{m\pi vt}{a})$, λ_{mn} = 固有値 ... (9)

次に、動的解も固有関数により、

$$\{w^d, \psi_x^d, \psi_y^d\} = \sum_m \sum_n q_{mn}(t) \{W_{mn}(x, y), \psi_{x, mn}(x, y), \psi_{y, mn}(x, y)\} \dots (10)$$

と表われ、式(8)の準静的解と共に式(7)に代入すれば、 $q_{mn}(t)$ に関する2階の微分方程式(11)を得る。

$$\ddot{q}_{mn} + 2\beta \dot{q}_{mn} + p^2 q_{mn} = \frac{qa^3}{D} \frac{b_{mn}^*}{\lambda_{mn}^4} \left[\left(\frac{m\pi v}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi vt}{a} - 2\beta \left(\frac{m\pi v}{a} \right) \cos \frac{m\pi vt}{a} \right] \dots (11)$$

式(11)は、初期条件： $(w)_{t=0} = 0, (\dot{w})_{t=0} = 0$, 即ち $(w^d)_{t=0} = -(w^s)_{t=0}, (\dot{w}^d)_{t=0} = -(\dot{w}^s)_{t=0}$... (12) の元で容易に解くことが出来、従って動的解が確定する。

3 数値計算結果

$a/b=1, \eta_0/b=1/20, \nu=0.3$ を固定し、板厚/スパン比 h/a , スピードパラメータ $c = \frac{Uv}{V_1} = \frac{Uv}{2a} \left(\frac{R_1 T_1}{E} \right)$ (R_1, T_1 = 基本固有振動数, 周期), 対数減衰係数 $d = \beta \frac{2\pi}{p}$ をパラメータとして数値計算を行った。また準静的解, 式(8)は二枚と等価な単級数解を別に誘導し、収束を速めた。

図2は、板中央の動的たわみ w を、薄板の静的最大たわみ W_0 で割った無次元動的たわみ曲線で、(a)は薄板 (b)は厚板の場合である。いずれも $c < 0.3$ ではたわみ曲線にゆらぎが認められ、 c の増大と共に一つのピークを持ち、それか右に移動する。

図3は、動的最大たわみ W_{max} を前出の W_0 で割った値 c の変化に示すプロットのものである。 $c < 0.2$ ではいくつかの極値をもつ複雑な曲線となるが、 c の増大と共に一つのピークを持ち、それはおよそ $c \sim 0.4 \sim 0.5$ において起る。せん断変形の影響は、例えば $c = 0.15$ の場合、静的たわみに対する増加率は $h/a = 0.1$ に対して22%、 $h/a = 0.15$ に対して約34%であり、強く出ているものと考えられる。いっぽう、図からもわかるように減衰効果はせん断変形のそれには比べるべくもない。

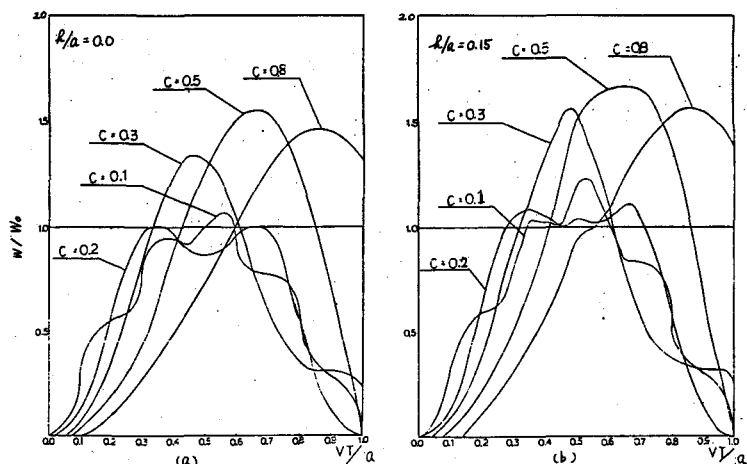


図2. 板中央の動的たわみ曲線 : W_0 = 薄板の静的最大たわみ, (a)薄板 (b)厚板

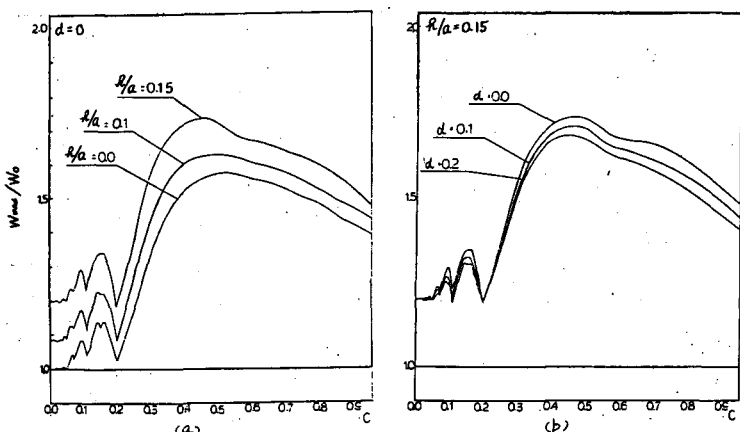


図3. 最大たわみの増加 VS. スピードパラメータ c , (a)減衰なく板厚の比, (b)板厚一定, 減衰の比

- 4 参考文献 (1) 井平一男：移動荷重をうける相対2辺単純支持, 他2辺自由の直交異方性板の振動性, 土木学会, 92号(昭38), (2) Iyenger & Jagadish: The Response of Beam and Slab Bridges to Moving Forces, IABSE Publication, Vol. 28-2, 1968. (3) Shirakawa: Response of Rectangular Thick Plate to Moving Single Load, Ing.-Arch., Vol. 50, 1981. (4) 小林 園田：粘弾性基盤上A型断面形と連続矩形板の解析, 土木年報, 1982. (5) マルティン 他：弾性平板, 培風館 (玉手訳)