

積分方程式法による波動方程式の新しい解析法

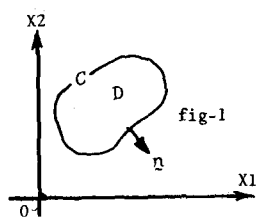
京都大学工学部 正 員 小林昭一
 京都大学工学部 正 員 西村直志
 京都大学大学院 学生員 石原洋二

1. まえかき

本研究は、2次元のAntiplaneの動弾性問題を積分方程式法によって解析したものであり、一重層ポテンシャル、二重層ポテンシャルの時間と空間との特異性を分離して解析したところにその特色がある。本研究では、ノイマン問題を扱い解析を試みた。

2. 基礎理論⁽¹⁾

いま、fig-1に示されるように G を (x_1, x_2) 平面での閉曲線、 D をその内部とし、対象とする弾性体は等方均質で、物体力はないものとする。また、場は静止過去を持っているとすると、当問題は次のように定式化される。



基礎方程式

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} u_3(x, t) = \rho \frac{\partial}{\partial t} u_3(x, t) \quad (\beta = 1, 2)$$

初期条件

$$u_3(x, 0) = 0, \quad \dot{u}_3(x, 0) = 0$$

境界条件

$$t_3(x, t) = T_3(x, t)$$

ここに $u_3(x, t)$, $t_3(x, t)$ はそれぞれ、場所 x , 時刻 t における変位と応力を表わし、 μ は Lamé の定数、 ρ は密度であり、 $T_3(x, t)$ は適当な関数である。

上に示された問題の解は、積分表示を用いると次のように表わすことができる。

$$\delta(\xi) \pi \rho u_3(\xi_1, \xi_2, t) = \int_C \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{t-R/C_1} t_3(x, \tau) / \sqrt{(t-\tau)^2 - R^2/C_1^2} d\tau - \frac{2\mu/\rho}{C_1^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\int_0^{t-R/C_1} u_3(x, \tau) / \sqrt{(t-\tau)^2 - R^2/C_1^2} d\tau \right] \right\} dc$$

ただし、 $C_1^2 = \mu/\rho$, $R^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2$, $\alpha = 1, 2$, $\delta(\xi) = \begin{cases} 4, & \xi \in D \\ 2, & \xi \in C \end{cases}$

3. 一重層ポテンシャルと二重層ポテンシャルの変形

一重層ポテンシャル、二重層ポテンシャルは、それぞれ共に時間と空間についての特異性が混合した状態になっており可積分でない。そこで次のように変形してやる。

i) 一重層ポテンシャル

$$\begin{aligned} & \int_0^{t-R/C_1} t_3(x, \tau) / \sqrt{(t-\tau)^2 - R^2/C_1^2} d\tau \\ &= \int_{R/C_1}^t t_3(x, t-T) / \sqrt{(t-R/C_1)^2 - R^2/C_1^2} dT \\ &= t_3(x, t-R/C_1) \int_{R/C_1}^t \frac{1}{\sqrt{(t-R/C_1)^2 - R^2/C_1^2}} dT + \int_{R/C_1}^t \{t_3(x, t-T) - t_3(x, t-R/C_1)\} / \sqrt{(t-R/C_1)^2 - R^2/C_1^2} dT \\ &= t_3(x, t-R/C_1) \cdot \cosh^{-1}(C_1 t/R) + \int_{R/C_1}^t \{t_3(x, t-T) - t_3(x, t-R/C_1)\} / \sqrt{(t-R/C_1)^2 - R^2/C_1^2} dT \\ &= t_3(x, t-R/C_1) \ln\left(\frac{t}{R}\right) + t_3(x, t-R/C_1) \ln\{C_1 t + \sqrt{(C_1 t)^2 - R^2}\} + \int_{R/C_1}^t \{t_3(x, t-T) - t_3(x, t-R/C_1)\} / \sqrt{(t-R/C_1)^2 - R^2/C_1^2} dT \end{aligned}$$

ii) 二重層ポテンシャル

$$\begin{aligned}
 & N_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \int_0^{t-R/C_T} U_3(x_1, z) / \sqrt{(t-z)^2 - R^2/C_T^2} dz \right\} \\
 &= P.f. \int_0^{t-R/C_T} R U_3(x_1, z) / \sqrt{(t-z)^2 - R^2/C_T^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial t} dz \\
 &= P.f. \int_{R/C_T}^t R U_3(x_1, t-T) / \sqrt{(T-R)^2 - R^2/C_T^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial t} dT \\
 &= -\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} U_3(x_1, t-R/C_T) \cdot C_T t / \sqrt{(C_T t)^2 - R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \int_{R/C_T}^{t-C_T R} \{ U_3(x_1, t-2R/C_T) - U_3(x_1, t-R/C_T) \} / \sqrt{(T-R)^2 - R^2/C_T^2} dT \\
 &= -\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} U_3(x_1, t-R/C_T) \cdot C_T t / \sqrt{(C_T t)^2 - R^2} + \frac{C_T}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \int_{R/C_T}^t \{ U_3(x_1, t-T) - U_3(x_1, t-R/C_T) \} / \sqrt{(C_T T)^2 - R^2/C_T^2} dT \\
 &= -\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} U_3(x_1, t-R/C_T) \cdot C_T t / \sqrt{(C_T t)^2 - R^2} + \frac{\partial R}{\partial t} \cdot \frac{R}{C_T} \int_{R/C_T}^t \{ U_3(x_1, t-T) - U_3(x_1, t-R/C_T) \} / \sqrt{T^2 - (R/C_T)^2} dT
 \end{aligned}$$

ここで P.f. は有限部分を表わす。この変形により、時間と空間との特異性が分離され、可積分となった。

4. モデル及び時間分割

解析モデルとしては fig-2 に示すような単位円領域に

$$U_3 = [1 - \cos\{C_T(t-t_0) - x_1\}] \cdot H\{C_T(t-t_0) - x_1\}$$

が入射した場合を考える。このときの境界条件は、

$$T_3 = -\sin\{C_T(t-t_0) - x_1\} \cdot H\{C_T(t-t_0) - x_1\}$$

となる。ここで $H\{\}$ は Heaviside 関数であり、静止過去にするために

$$t_0 > -\min x_1 / C_T$$

とする。本研究では、 $t_0 = 1.5$, $M = 0.5$, $P = 1.0$ とし、さらに境界は 24 等分割にした。(fig-2)

時間の分割は、境界を分割したときの各分割点間の中の最小距離: R_{min} を波速: C_T で除したもののよりも小さくとり、つまり、 $R_{min} = 0.261$

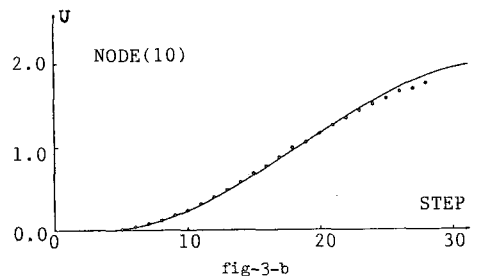
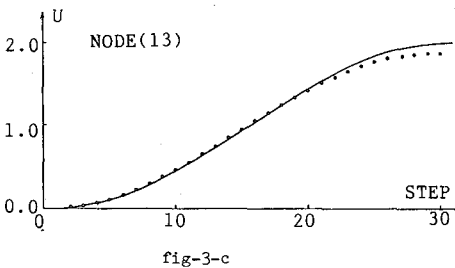
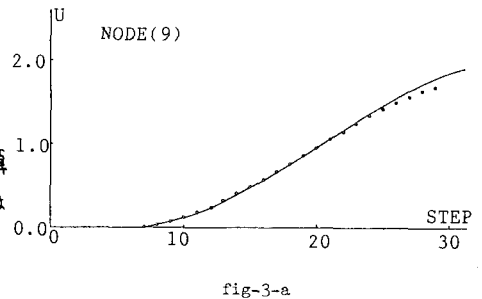
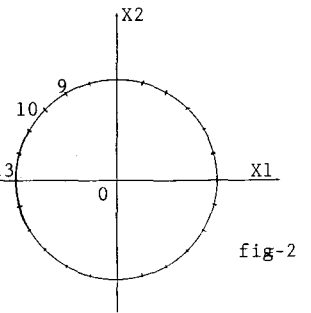
$$\Delta t \leq f \cdot R_{min} / C_T \quad (0 < f < 1)$$

とする。(explicit difference method)

5. 計算結果

$f = 0.4$ のときの、Node (9), (10), (13) での変位の計算結果を fig-3-(a)~(c) に示す。さらに詳細については当日発表する予定である。

$\circ \cdots$ 計算結果
 $— \cdots$ 解析解



* 参考文献

① J.D.Achenbach, "Wave Propagation in Elastic Solids", North Holland Publishing Co., Amsterdam, London and American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973