

矩形等分布加振力による2層弾性体表面の振動(その2)

神戸大 正 北村泰寿 学O高谷富也

1. まえがき 構造物-地盤系の動的相互作用の解析において、接触面を有限個の要素に分割する数値解法を採用するとき、地盤の剛性行列が必要となる。この剛性行列は各要素に作用する面加振力による各要素の中央変位から求められる。本文では、分割要素に矩形を用いた場合と、これと等価な面積の円形とした場合の変位の比較について報告する。

2. 変位式 弾性体表面の矩形等分布加振による変位は次式のように得られている。¹⁾

上下加振力 $\delta_z e^{i\omega t}$ による上下変位 U_z について、

$$U_z = -\frac{4a\delta_z e^{i\omega t}}{\pi^2 \mu_1 a_0} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{\alpha_1 W(\xi)}{\xi F(\xi)} \cdot \frac{T(\xi, \theta)}{\cos \theta \sin \theta} d\xi d\theta \quad (1)$$

水平加振力 $\delta_x e^{i\omega t}$ による水平変位 U_x について、

$$U_x = -\frac{4a\delta_x e^{i\omega t}}{\pi^2 \mu_1 a_0} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \left\{ \frac{\beta_1 U(\xi)}{\xi F(\xi)} \cos^2 \theta + \frac{H(\xi)}{\xi G(\xi)} \sin^2 \theta \right\} \frac{T(\xi, \theta)}{\cos \theta \sin \theta} d\xi d\theta \quad (2)$$

一方、円形等分布加振による変位は次式のように表わされる。²⁾

$$U_z = -\frac{aC\delta_z e^{i\omega t}}{\mu_1} \int_0^\infty \frac{\alpha_1 W(\xi)}{F(\xi)} J_0(Ra_0\xi) J_1(Ca_0\xi) d\xi \quad (3)$$

$$U_x = -\frac{aC\delta_x e^{i\omega t}}{2\mu_1} \int_0^\infty \left\{ \frac{\beta_1 U(\xi)}{F(\xi)} D(\xi) + \frac{H(\xi)}{G(\xi)} E(\xi) \right\} d\xi \quad (4)$$

ここで、 $T(\xi, \theta) = \cos(\xi X a_0 \cos \theta) \cos(\xi Y a_0 \sin \theta) \sin(\xi a_0 \cos \theta / 2) \sin(\xi b_0 \sin \theta / 2)$

$D(\xi) = \{J_0(Ra_0\xi) - (x^2 - y^2)J_2(Ra_0\xi)/r^2\} J_1(Ca_0\xi)$, $E(\xi) = \{J_0(Ra_0\xi) + (x^2 - y^2)J_2(Ra_0\xi)/r^2\} J_1(Ca_0\xi)$

$\alpha_1 = \sqrt{\xi^2 - \beta_1^2}$, $\beta_1 = \sqrt{\xi^2 - 1}$, $\beta = \sqrt{(1-2\nu_1)/2(1-\nu_1)}$, $a_0 = \omega a / \nu_1$, $b_0 = \omega b / \nu_1$, $X = x/a$, $Y = y/a$,

$C = \sqrt{(b/a)/\pi}$ (等価半径), $R = r/a = \sqrt{X^2 + Y^2}$

ただし、 a , b は矩形面の幅, ν_1 , μ_1 , ν_1 はそれぞれ表層の横波速度, せん断弾性係数, ポアソン比である。

また、 $F(\xi)$, $W(\xi)$, $U(\xi)$, $G(\xi)$, $H(\xi)$ は次のように与えられる。

(1) 半無限弾性体の場合 $F(\xi) = (2\xi^2 - 1)^2 - 4\xi^2 \nu_1 \beta_1$, $W(\xi) = 1$, $U(\xi) = 1$, $G(\xi) = \beta_1$, $H(\xi) = -1$

(2) 2層弾性体の場合 紙数の都合上、詳細は文献1)あるいは文献2)に譲る。

(3) 剛基盤上の弾性体の場合 上記(2)において、(下層の μ) / $\mu_1 = \infty$ とおけば得られるので、ここでは省略する。

3. 変位式間の関係 式(1)と(3)および式(2)と(4)において、共通する項を省いて対応する項のみを取り出して調べると、次式のように表わされる。上下変位については、

$$\frac{4}{\pi a_0 \xi} \int_0^{\pi/2} \frac{T(\xi, \theta)}{\cos \theta \sin \theta} d\theta \longrightarrow \pi C J_0(Ra_0\xi) J_1(Ca_0\xi) \quad (5)$$

一方、水平変位については、

Yasutoshi KITAMURA, Tomiya TAKATANI

$$\frac{8}{\pi a_0 \zeta} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta T(\zeta, \theta)}{\sin \theta} d\theta \longleftrightarrow \pi C D(\zeta) \quad , \quad \frac{8}{\pi a_0 \zeta} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta T(\zeta, \theta)}{\cos \theta} d\theta \longleftrightarrow \pi C E(\zeta)$$

上式より、それぞれの対応する項は無次元振動数 a_0 、振源距離 ζ/a 、 y/a 、載荷面形状等に関係しているが、表層厚には依存していない。つまり、矩形加振と円形加振の差異は半無限弾性体、2層弾性体、剛基盤上の弾性体などの区別には関係していないことがわかる。

4. 載荷要素の中央変位 本文では、載荷要素の中央変位のみについての検討を示し、載荷要素外の変位については点加振解との比較も含めて、稿を改めて報告する。式(1)~(4)の数値積分は、主値積分と留数に分け直接数値積分によって求まる。なお、数値積分に際しては、 $\zeta \rightarrow \infty$ での近似項と差引くことにより、積分の収束を早める操作を行う。²⁾ また、矩形加振においては、 θ 軸の積分に級数展開公式を用いて演算の短縮を計る。例えば、

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(a_0 \cos \theta) \sin(b_0 \sin \theta)}{\cos \theta \sin \theta} d\theta = 4 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m J_{2m+1}(a_0) J_{2n+1}(b_0) I_0(m, n) \quad (6)$$

ただし、 $I_0(m, n) = \begin{cases} \pi/2 & (|n-m| = \text{偶数}, 0, \text{または } n-m = \text{奇数かつ } n > m \text{ のとき}) \\ -\pi/2 & (n-m = \text{奇数かつ } n < m \text{ のとき}) \end{cases}$

図-1 は、1例であるが、式(5)の対応関係を示したものである。また、図-2、3は、半無限弾性体の場合について、載荷面の形状が変位に及ぼす影響を調べたものである。図-2、3において、載荷面が正方形 ($b/a = 1$) の場合、等価面積の円形加

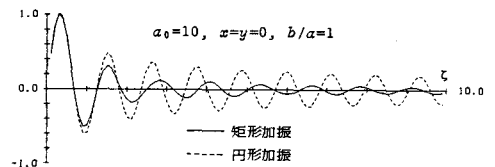


図-1 式(5)の関数値の比較

振とほとんど差異がないことがわかる。図-1より、式(5)の対応には差異がみられるが、変位の値は $\zeta < 1$ の範

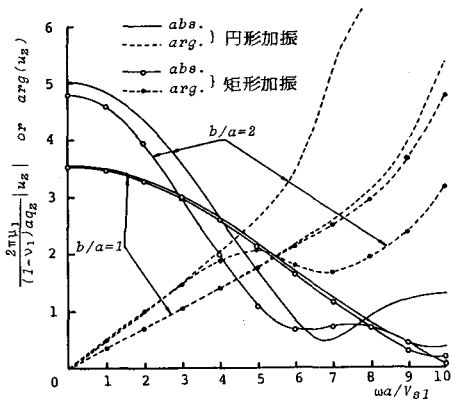


図-2 上下加振による上下変位 ($v_1=1/3$)

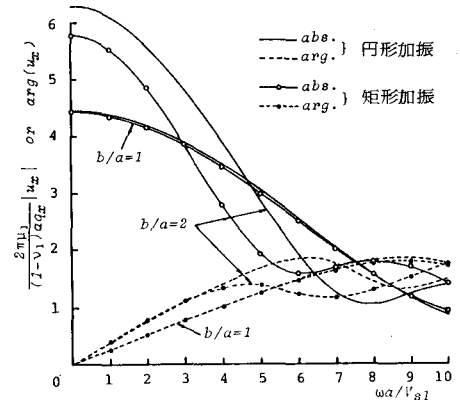


図-3 水平加振による水平変位 ($v_1=1/3$)

圍の関数値で決まることを意味している。一方、図-2、3より、載荷面が長方形 ($b/a = 2$) の場合には大きな差異が生じている。これより、接触面を有限個の要素に分割する数値解法を採用する場合、正方形要素を用いる限り、円形加振による変位で代用してよいことがわかる。

なお、紙数の都合上、本文で図示できなかった層剛性比が変位に及ぼす影響等については講演時に譲る。

文献：1) 2) 北村他：建設工学研究所報告，No.22，pp.145~166 および pp.167~186，1980。