Ritz法による厚板の曲げ解析

大阪市立大学　正員　○小林　治俊
〃　　〃　園田　恵一郎

1 まえがき

せん断変形を考慮した平板の曲げ問題に対する近似解法として提案されているものとして，有限要素法[1]，差分法[2]，境界積分法[3]，選点最小二乗法[4]がある。これらは，薄板の曲げ解析においても周知の解法であり，厚板解析への応用と言える。また，境界条件を満足する特定の関数を用いたEdge Function法と称される解析例も報告されている[5]。本研究は，薄板の曲げ・振動・座屈解析にしばしば用いられるRayleigh-Ritz法を厚板の解析に適用したものである。平板にはMindlin理論を用い，変位成分に対する試行関数にはTimoshenko Beamの固有関数を採用した。

2 Ritz法による解析

取り扱いの簡単さを考え，図1に示す様に，$2a\times 2b$の辺長で，x・y軸に対称な形状を有する矩形板を解析対象とする。

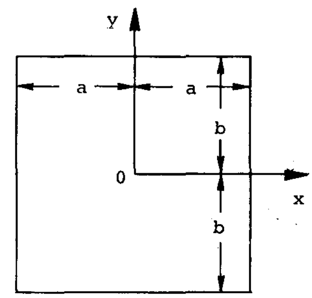

図1－座標系

系のポテンシャル・エネルギーは，

$$U=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\Big\{D\Big[\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\Big)^2+2\nu\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\Big]+\frac{Gh^3}{12}\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\Big)^2$$

$$+\kappa Gh\Big[\Big(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi_x\Big)^2+\Big(\frac{\partial w}{\partial y}-\psi_y\Big)^2\Big]-\Big(qw-\frac{1}{2}kw^2\Big)\Big\}dxdy \quad\text{——(1)}$$

ここで，w＝たわみ；ψ_x,ψ_y＝x・y軸方向の回転角；D＝板剛度；h＝板厚；G＝せん断剛性；ν＝ポアソン比；$\kappa(=5/6)$＝せん断修正係数；k＝基礎係数；q＝荷重。

断面力は変位成分w，ψ_x，ψ_yにより，次式で表わされる。

$$\left.\begin{aligned}&M_x=-D\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\Big)\ ;\ M_y=-D\Big(\frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\nu\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\Big)\ ;\ M_{xy}=-\frac{1-\nu}{2}D\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\Big)\\&Q_x=\kappa Gh\Big(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi_x\Big)\ ;\ Q_y=\kappa Gh\Big(\frac{\partial w}{\partial y}-\psi_y\Big)\end{aligned}\right\}\text{——(2)}$$

境界条件は，例えば$x=\pm a$において，

<u>単純支持</u>：$w=\psi_y=M_x=0$，　<u>固定</u>：$w=\psi_x=\psi_y=0$，　<u>自由</u>：$M_x=M_{xy}=Q_x=0$　——(3)

さて変位成分w，ψ_x，ψ_yに対する試行関数に，回転慣性を無視したTimoshenko Beamの固有関数[6]を用いる：

$$w=\sum_m^M\sum_n^N a_{mn}W_m(x)W_n(y)\ ,\quad \psi_x=\sum_m^M\sum_n^N b_{mn}\Psi_m(x)W_n(y)\ ,\quad \psi_y=\sum_m^M\sum_n^N c_{mn}W_m(x)\Psi_n(y)\quad\text{——(4)}$$

a_{mn}，b_{mn}，c_{mn}は未定係数であり，固有関数$W_m(x)$，$\Psi_m(x)$は次の境界条件を満足する。

Harutoshi KOBAYASHI and Keiichiro SONODA

単純支持：$W_m=\partial\Psi_m/\partial x=0$，　固定：$W_m=\Psi_m=0$，　自由：$\partial\Psi_m/\partial x=\partial W_m/\partial x-\Psi_m=0$　——(5)
いっぽう $W_n(y),\Psi_n(y)$ も(5)と同様の条件を満足する。例として，y軸に対称なモードの固有関数 $W_m(x),\Psi_m(x)$ を示せば次のようになる（固有方程式も併記）。

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{単純支持：} & \left[\begin{array}{l} W_m(x)=\cos(b_m\xi), \\ \Psi_m(x)=-(a_m^2/ab_m)\sin(b_m\xi) \quad , \quad b_m=(m-\frac{1}{2})\pi \end{array}\right. \\
\text{固定：} & \left[\begin{array}{l} W_m(x)=\cosh(a_m\xi)/\cosh a_m-\cos(b_m\xi)/\cos b_m , \\ \Psi_m(x)=(b_m^2/aa_m)[\sinh(a_m\xi)/\cosh a_m+(a_m/b_m)^3\sin(b_m\xi)/\cos b_m], \quad a_m^3\coth a_m+b_m^3\cot b_m=0 \end{array}\right. \\
\text{自由：} & \left[\begin{array}{l} W_m(x)=\cosh(a_m\xi)/\cosh a_m+(b_m/a_m)^2\cos(b_m\xi)/\cos b_m \\ \Psi_m(x)=(b_m^2/a\cdot a_m)[\sinh(a_m\xi)/\cosh a_m-(a_m/b_m)\sin(b_m\xi)/\cos b_m], \quad a_m\tanh a_m+b_m\tan b_m=0 \end{array}\right.
\end{array}\right]\text{—(5)}$$

上式で，$\xi=x/a$，$a_m=b_m/\sqrt{1+(b_mS)^2}$，$S^2=EI/KAGa^2$，$EI$＝梁の曲げ剛性，$A$＝断面積
式(5)の境界条件により，式(3)の板の境界条件のうち，単純支持，固定の場合は満足するが自由の場合は，ポアソン比 $\nu=0$ の場合しか満足しない（Euler Beamの固有関数を用いた薄板解析と同じ）。
未定係数 a_{mn},b_{mn},c_{mn} は，式(4)をエネルギー式(1)に代入し，それを最小にする条件：

$$\partial U/\partial a_{mn}=\partial U/\partial b_{mn}=\partial U/\partial c_{mn}=0 \quad \text{———(6)}$$

より得られる次の3群の連立一次方程式を解いて求められる。

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_r^R\sum_s^S(a_{rs}A_1^{mrns}+b_{rs}B_1^{mrns}+c_{rs}C_1^{mrns})=(a^4/D)Q_{mn} \\
\sum_r^R\sum_s^S(a_{rs}A_i^{mrns}+b_{rs}B_i^{mrns}+c_{rs}C_i^{mrns})=0 \quad ,(i=2,3)
\end{array}\right]\text{———(7)}$$

ここで，

$$\left.\begin{array}{l}
A_1^{mrns}=\frac{1}{S^2}[(K_2^{mr}L_1^{ns}+K_2^{ns}L_1^{mr})+\lambda^2(K_1^{mr}L_2^{ns}+K_1^{ns}L_2^{mr})]+K^4(K_1^{mr}L_1^{ns}+K_1^{ns}L_1^{mr}) \\
B_1^{mrns}=-\frac{2}{S^2}K_3^{mr}L_1^{ns} \quad , \quad C_1^{mrns}=-\frac{2\lambda^2}{S^2}K_1^{mr}L_3^{ns} \\
A_2^{mrns}=-\frac{2}{S^2}K_3^{rm}L_1^{sn} \quad , \quad C_2^{mrns}=\lambda^2(2\nu K_6^{rm}L_6^{ns}+(1-\nu)K_3^{rm}L_3^{ns}) \\
B_2^{mrns}=(K_5^{mr}L_1^{ns}+K_5^{ns}L_1^{mr})+\frac{1-\nu}{2}\lambda^2(K_4^{mr}L_2^{ns}+K_4^{ns}L_2^{mr})+\frac{1}{S^2}(K_4^{mr}L_1^{ns}+K_4^{ns}L_1^{mr}) \\
A_3^{mrns}=-\frac{2\lambda^2}{S^2}K_1\ L_3^{sn} \quad , \quad b_3^{mrns}=\lambda^2(2\nu K_6^{mr}L_6^{sn}+(1-\nu)K_3^{mr}L_3^{sn}) \\
C_3^{mrns}=\lambda^4(K_1^{mr}L_5^{ns}+K_1^{ns}L_5^{mr})+\frac{1-\nu}{2}\lambda^2(K_2^{mr}L_4^{ns}+K_2^{ns}L_4^{mr})+\frac{\lambda^2}{S^2}(K_1^{mr}L_4^{ns}+K_1^{ns}L_4^{mr})
\end{array}\right\}\text{——(8)}$$

で，K_i^{mr},L_i^{ns} $(i=1\sim6)$，Q_{mn} などは次の積分値を意味する。

$$K_1^{mr}=\int_{-1}^{1}W_m(\xi)W_r(\xi)d\xi \ ,\ K_2^{mr}=\int_{-1}^{1}W_m'(\xi)W_r'(\xi)d\xi \ ,\ K_3^{mr}=\int_{-1}^{1}W_m'(\xi)\Psi_r(\xi)d\xi$$

$$K_4^{mr}=\int_{-1}^{1}\Psi_m(\xi)\Psi_r(\xi)d\xi \ ,\ K_5^{mr}=\int_{-1}^{1}\Psi_m'(\xi)\Psi_r'(\xi)d\xi \ ,\ K_6^{mr}=\int_{-1}^{1}W_m(\xi)\Psi_r'(\xi)d\xi$$

$$Q_{mn}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}q(\xi,\eta)W_m(\xi)W_n(\eta)d\xi d\eta \qquad \lambda=a/b\ ,\ S=(h/a)/\sqrt{6K(1-\nu)}\ ,\ \eta=y/b\ ,\ '=d/d\xi$$

L_i^{ns} $(i=1\sim6)$ は K_i^{mr} において，$W_m(\xi),\Psi_m(\xi),m,r,\xi,a_m,b_m$ を $W_n(\eta),\Psi_n(\eta),n,s,\eta,a_n,b_n$ に置換する。
尚，固有関数の直交性：$\int_{-1}^{1}W_m(\xi)W_r(\xi)d\xi=0$ $(m\neq r)$; N_m $(m=r)$ が利用できる。

3 参考文献 (1) C.W.Pryor,R.M.Barker, & D.Frederick : Finite Element Bending Analysis of Reissner Plates, Proc.ASCE, Vol.96,No.EM6, 1970. (2) D.J.Henwood, J.R.Whiteman, & A.L.Yettram : Finite Difference Solution of a System of First-order Partial Differential Equations, Int.J.Num.Meth.Engng.,Vol.17,1981. (3) F.V.Weeën : Application of the Boundary Integral Equation Method to Reissner's Plate Model, Int.J.Num.Meth.Engng.,Vol.18,1982. (4) T.Mizusawa & T.Kajita : Application of Point Least Squares Method with B-Splines in Solid Mechanics Problems, Int.J.Num.Meth.Engng.,Vol.18,1982. (5) R.S.Deshmukh & R.R.Archer : Numerical Solution of Moderately Thick Plates, Proc.ASCE, Vol.100, No.EM5, 1974. (6) H.Kobayashi & K.Sonoda : Timoshenko Beams on Linear Viscoelastic Foundations, Proc.ASCE, Vol.109, No.GT6, 1983(in Press).