半無限直交異方弾性体の３次元解析

大阪市立大学　正員○堀川都志雄
大阪市立大学　正員　園田恵一郎

1はしがき　半無限弾性体に集中荷重が作用する場合の解として、周知のようにBoussinesq，Cerrutiおよび Mindlinの第Ⅰ，Ⅱの解があげられる。　さらに、ある任意幅を介して載荷される場合には、上記の解を積分することによって弾性体中の応力が求められ、フーチング等の基礎構造物の支持力算定に利用されている。　また、半無限体の一方向の弾性定数が他の方向のものと異なっている材料で構成されている横等方弾性体（transversely Isotropy）についても、S.G.Lekhnisky，H.H.Michell，A.S.Lodge，Y.C.Panらおよび松岡等の研究があげられる。　等方や横等方性半無限体の集中荷重問題に対して、フーリエ変換や変位関数を用いることによって閉じた解（Closed Solution）が誘導されている。　しかしながら、直交異方弾性体に対して閉じた解を誘導することは非常に困難である。　著者らは直交異方弾性体での３つの独立した変位関数を誘導し、全周単純支持された直交異方性厚板に上面荷重あるいは物体力が作用する場合の解を示した[1)]。

本研究においては、これらの変位関数を利用して半無限直交異方弾性体の部分等分布荷重が作用する場合についての解をフーリエ変換を用いて誘導するものである。

2理論式

直交異方弾性体のフックの法則は次のように表わされる。

$$\sigma_x = C_{11}\partial_x u + C_{12}\partial_y v + C_{13}\partial_z w \quad , \quad \tau_{xy} = C_{44}(\partial_x v + \partial_y u)$$
$$\sigma_y = C_{21}\partial_x u + C_{22}\partial_y v + C_{23}\partial_z w \quad , \quad \tau_{xz} = C_{55}(\partial_x w + \partial_z u) \qquad (1)$$
$$\sigma_z = C_{31}\partial_x u + C_{32}\partial_y v + C_{33}\partial_z w \quad , \quad \tau_{yz} = C_{66}(\partial_y w + \partial_z v)$$

ここで、$C_{ij}=C_{ji}$，$\partial_x=\partial/\partial x$，$\partial_y=\partial/\partial y$，$\partial_z=\partial/\partial z$．

変位関数F_3°の基礎式と変位との関係式は以下に示される。

$$\mathbb{L}^\circ(x,y,z)F_3^\circ = 0 \quad , \quad 2B_5[u\ v\ w]^T = [L_{31}\ L_{32}\ L_{33}]^T F_3^\circ \qquad (2)$$

ここで、$B_5=C_{55}$，$\mathbb{L}^\circ(x,y,z)$，L_{31}，L_{32}，L_{33}は関数F_3°に対する微分演算子

変位関数F_3°をx，y方向にフーリエ変換すれば、

$$F_3^\circ = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \begin{pmatrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta y\\ \sin\beta y\end{pmatrix} d\alpha d\beta \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty F_3^\circ(\xi,\eta)\begin{pmatrix}\cos\alpha\xi\\ \sin\alpha\xi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta\eta\\ \cos\beta\eta\end{pmatrix} d\xi d\eta \qquad (3)$$

次に、関数F_3°のz方向の成分を$e^{\rho z}$とすると、ρに関する特性方程式は

$$a_9\rho^6 - (a_4\alpha^2+a_8\beta^2)\rho^4 + (a_2\alpha^4+a_5\alpha^2\beta^2+a_7\beta^4)\rho^2 - (\alpha^6+a_1\alpha^4\beta^2+a_3\alpha^2\beta^4+a_6\beta^6) = 0 \qquad (4)$$

等方や横等方性体では式(4)はρに関して４次と２次方程式にそれぞれ分離できる。

さらに、$z\to\infty$で変位，応力が零になることを考慮すれば、関数F_3°は次のような３つに分類される。

$$F_3^\circ = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \begin{bmatrix} C_1e^{-\lambda z}\sin\mu z & + C_2e^{-\lambda z}\cos\mu z & + C_3e^{-\gamma z}\\ C_1e^{-\lambda z} & + C_2\lambda z e^{-\lambda z} & + C_3e^{-\gamma z}\\ C_1e^{-\lambda z} & + C_2e^{-\mu z} & + C_3e^{-\gamma z}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta y\\ \sin\beta y\end{pmatrix} d\alpha d\beta \qquad (5)$$

Toshio HORIKAWA and Keiichiro SONODA

ここで、$C_i\,(i=1,3)$は半無限体の表面での境界条件より決定される積分定数

式(5)を式(2)に代入すれば、変位uが求められる。

$$2B_5u=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \begin{Bmatrix} C_1e^{-\lambda z}(b_1\sin\mu z-b_2\cos\mu z)+C_2e^{-\lambda z}(b_1\cos\mu z+b_2\sin\mu z)+C_3b_3e^{-\delta z} \\ C_1d_1e^{-\lambda z}+C_2(d_1\lambda z-d_2)e^{-\lambda z}+C_3d_3e^{-\delta z} \\ C_1e_1e^{-\lambda z}+C_2e_2e^{-\mu z}+C_3e_3e^{-\delta z}\end{Bmatrix}\begin{pmatrix}\sin\alpha x\\ \cos\alpha x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta y\\ \sin\beta y\end{pmatrix}d\alpha d\beta \qquad (6)_{1,2,3}$$

他の変位vおよびwも同様にして得られる。

さらに、式(6)を式(1)に代入すれば応力σ_x, σ_y, ---- , τ_{yz}が得られる。例えば、式(6-1)による応力σ_z, τ_{xz}, τ_{yz}を以下に示す。

$$\sigma_z=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[C_1e^{-\lambda z}(A_1\sin\mu z+A_2\cos\mu z)+C_2e^{-\lambda z}(A_1\cos\mu z-A_2\sin\mu z)+C_3A_3e^{-\delta z}\right]\begin{pmatrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta y\\ \sin\beta y\end{pmatrix}d\alpha d\beta$$

$$\tau_{xz}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[C_1e^{-\lambda z}(A_4\sin\mu z+A_5\cos\mu z)+C_2e^{-\lambda z}(A_4\cos\mu z-A_5\sin\mu z)+C_3A_6e^{-\delta z}\right]\begin{pmatrix}\sin\alpha x\\ \cos\alpha x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta y\\ \sin\beta y\end{pmatrix}d\alpha d\beta \qquad (7)$$

$$\tau_{yz}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\left[C_1e^{-\lambda z}(A_7\sin\mu z+A_8\cos\mu z)+C_2e^{-\lambda z}(A_7\cos\mu z-A_8\sin\mu z)+C_3A_9e^{-\delta z}\right]\begin{pmatrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\beta y\\ \cos\beta y\end{pmatrix}d\alpha d\beta$$

半無限弾性体の表面($z=0$)に鉛直部分荷重が作用する場合についての積分定数は次式より求められる。

$$\begin{aligned} A_2C_1+A_1C_2+A_3C_3&=-q_{\alpha\beta}\\ A_5C_1+A_4C_2+A_6C_3&=0\\ A_8C_1+A_7C_2+A_9C_3&=0\end{aligned} \qquad (8)$$

ここで、

$$q_{\alpha\beta}=\int_{-c}^{c}\int_{-d}^{d}q\cos\alpha\xi\cos\beta\eta\,d\xi d\eta=\frac{4q}{\alpha\beta}\sin\alpha c\sin\beta d$$

3 数値計算例

図1に示す直交異方弾性体の材料定数を次のようにとる[2]。

$C_{11}/C_{55}=6.253$, $C_{12}/C_{55}=1.458$, $C_{13}/C_{55}=0.067$, $C_{22}/C_{55}=3.396$, $C_{33}/C_{55}=3.315$, $C_{23}/C_{55}=0.615$, $C_{44}/C_{55}=1.644$, $C_{66}/C_{55}=1.669$.

図2および3は深さ方向のσ_zおよびσ_yの変化する状態を示す。

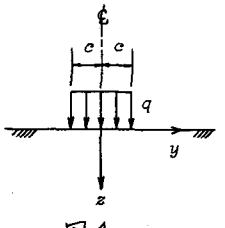

図1

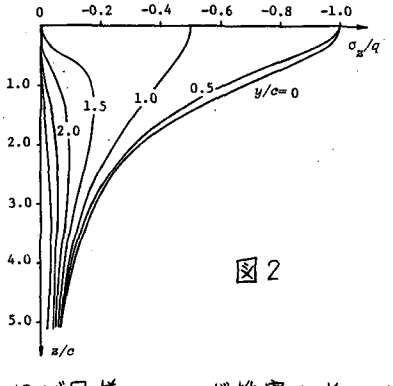

図2

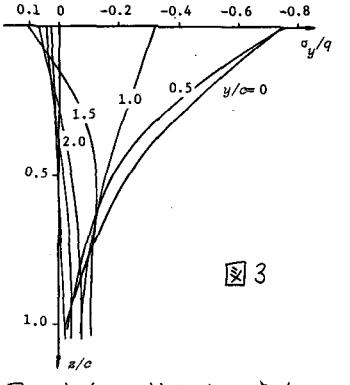

図3

4 あとがき

等方弾性体とほぼ同様のことが推察され、σ_zの深さ方向の減小する度合いはσ_yに比べて緩慢であることが分る。

1) Sonoda,K. and Horikawa,T., Displacement functions for an orthotropic elastic body and their applications thick plate problems, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.29, 1981.
2) Srinivas,R. and Rao,A.K., Bending,vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plate and laminates, Int.Jour. of Solid and Struc. Vol.6,1970.