積分方程式法によるMicropolar弾性体の解析

白石基礎工事(株)　正員　○宮塚　喜昭
福井大学　工学部　正員　福井　卓雄

1. まえがき

構造物の原子・分子等の存在特性、あるいは、土中の岩の散在などを考慮する場合、質量密度の不均一性，構成要素自体の回転等の本質的運動を考えなければならない。これらのことを従来の古典連続体理論に付加的に考慮した理論の一つに、C. Eringen によって提言されたmicropolar 理論[1]がある。本研究では、このmicropolar理論に基づき、円孔を持つ無限弾性体における応力集中問題を積分方程式法により解析した。応力集中要因の、弾性定数に対する相対的大きさにより、micropolarの効果は目に見える程のものとなると考えられる。

2. 2次元 Kelvin 解

本論では平面ひずみ問題を取扱う。ここで、ラテン添字には1,2,3を使い、ギリシア添字は1,2までを示すことにする。Eringenの基礎式より、2次元問題の変位で表わした運動方程式は式(1)のようである。[注)] さらに、偏微分作用素$\mathbb{L}$を用いて、式(2)の様にまとめておく。記号は後でまとめておく。

$$\left.\begin{aligned}(\mu+\kappa)u_{\alpha,\beta\beta}+(\lambda+\mu)u_{\beta,\alpha\beta}+\kappa\varepsilon_{3\alpha\beta}u_{3,\beta}+f_\alpha&=\rho\ddot{u}_\alpha\\ \kappa\varepsilon_{3\alpha\beta}u_{\beta,\alpha}+\gamma u_{3,\alpha\alpha}-2\kappa u_3+f_3&=\rho J\ddot{u}_3\end{aligned}\right\}\cdots(1)\qquad \mathbb{L}_{ij}u_j=-b_i\quad\cdots(2)$$

式(1)より2次元Kelvin解を解く。福井[2]によるとその解は式(3),(4)となる。

[変位]　$u_i(x)=\Gamma_{ij}(x)F_j$

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}(x)&=\frac{1}{G}\left\{f(r)\delta_{\alpha\beta}+\frac{1}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2 g(r)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right\}+\frac{l^2}{G}\varepsilon_{3\alpha\lambda}\varepsilon_{3\beta\mu}\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda\partial x_\mu}\{f(r)-h(r)\}\\ \Gamma_{\alpha3}(x)&=\frac{\varepsilon_{3\alpha\lambda}}{2G}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\{f(r)-h(r)\},\quad \Gamma_{3\alpha}(x)=-\Gamma_{\alpha3}(x),\quad \Gamma_{33}(x)=\frac{1}{4Gl^2}h(r)\end{aligned}\right\}\cdots(3)$$

[応力]　$t_{\alpha i}(x)=\Sigma_{\alpha ij}(x)F_j$

$\Sigma_{\alpha ij}$は、micropolar理論の変位-応力関係式より、式(3)から求まる。　$\Big\}\cdots(4)$

ここで、$f(r)=\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{r}\right)$，$g(r)=\frac{1}{8\pi}r^2(\log r-1)$，$h(r)=\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{r}{l_1}\right)$であり、$r^2=x_1^2+x_2^2$である。また、$K_n(\xi)$は、第2種n次の変形Bessel関数である。

記号］　$t_{\alpha\beta}$：応力，f_α：物体力，$t_{\alpha3}$：偶応力，f_3：物体偶力，$\ddot{u}_\alpha$：加速度ベクトル

$\ddot{u}_3$：角加速度ベクトル，u_α：変位，u_3：角変位，ε_{ijk}：交代テンソル

J：変位勾配のJacobian，δ_{ij}：Kronecker delta

κ,γ,l_1,l：micropolar弾性定数，G,ν,λ,μ：弾性定数，$b_i=f_i-\rho\ddot{u}_i$

注意）ここでは平面ひずみ状態だけを対象とするので、式の簡略化のためにu_3, $t_{\alpha3}$, f_3, $\ddot{u}_3$, F_3等は上の様に定義した。

Takuo FUKUI　and　Yoshiaki MIYAZUKA

3. 積分方程式への定式化

平面上で閉曲線∂Dを考え、それに含まれる領域をDとする。物体力のない静的micro-polar弾性学における境界値問題は、式(2)より次の様に定義できる。

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbb{L}^{x}_{ij}\,u_j(x) = 0 & & x \in D \\ \text{i)}\ \ u_i(x) = \bar{u}_i(x) & \text{ii)}\ \ t_i(x) = \overset{n}{T}_{ij}\,u_j(x) = \bar{t}_i(x) & x \in \partial D \end{array}\right\} \cdots (5)$$

ここで、Tは応力ベクトル作用素であり、$\bar{u}_\alpha$, $\bar{u}_3$, $\bar{t}_\alpha$, $\bar{t}_3$ はそれぞれ、境界上での変位，角変位，応力ベクトル、そして偶応力ベクトルである。

ポテンシャルの性質から、式(3),(4)を用いると式(5)は次のようになる。

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbb{L}^{x}_{ij}\,u_j(x) = 0 & x \in D \\ \text{i)}\ \ \bar{u}_i(x) = \int_{\partial D} \Gamma_{ij}(x;y)\,\varphi_j(y)\,dS_y & x \in \partial D \\ \text{ii)}\ \ \bar{t}_i(x) = n_\alpha t^{(0)}_{\alpha i} + \frac{1}{2}\varphi_i(x) + \int_{\partial D} n_\alpha \Sigma_{\alpha ij}(x;y)\,\varphi_j(y)\,dS_y & x \in \partial D \end{array}\right\} \cdots (6)$$

ここで、n_α は境界上の外向き法線ベクトルの方向余弦を表わし、φ_iは境界上に分布させたポテンシャル密度である。さらに、$t^{(0)}_{\alpha i}$は無限遠に作用する一様応力である。式(6)により、境界上での未知関数$\varphi_i(y)$を解けば、領域D内の解析各点の変位，応力，角変位、あるいは偶応力を解くことができる。

4. 複雑な積分核を含む積分の評価

以上の様に研究を進めていくうえで、変形Bessel関数の積分の評価が必要となった。これの定積分は、一般に初等関数で表わすことが困難であるため、以下の様な手法に基づきこれを評価した。尚、本論で現われる変形Bessel関数を含む項は、一般に$\int_a^b \frac{x^m}{r^n} K_\ell\left(\frac{r}{\ell_1}\right) dx$ $(\ell=0,1)$の形を持つ。変形Bessel関数$K_0\left(\frac{r}{\ell_1}\right)$,$K_1\left(\frac{r}{\ell_1}\right)$をそれぞれ3次B-spline近似する。本来、B-splineは曲線自体の区間ごとの近似であるが、これを区間ごとの3次式としてとらえ、3次式の係数と変数に分けることを試みた。これにより、$K_n\left(\frac{r}{\ell_1}\right) \doteqdot \sum_{N} \left\{ a_N + b_N\left(\frac{r}{\ell_1}\right) + c_N\left(\frac{r}{\ell_1}\right)^2 + d_N \cdot \left(\frac{r}{\ell_1}\right)^3 \right\}$を得ることができた。ところで、$K_0(\xi)$, $K_1(\xi)$ は$\xi=0$付近で特異性を有する関数であるため、このままB-spline近似すると精度の劣化が考えられる。さらに、$K_0(\xi)$, $K_1(\xi)$の特異性がそれぞれ、$\log\xi$, $1/\xi$に寄与していることから、$\xi=0$近傍、即ち、本研究では$\xi=\frac{r}{\ell_1}<1.0$では、$K_0(\xi)$, $K_1(\xi)$を、B-spline近似した3次式の部分と特異性を有する部分($\log\xi$, $1/\xi$)に分け、それぞれの積分を評価したうえでこれらを重ね合わせて現われる積分を評価することにする。さらに、$\log(r/\ell_1)$の積分の実行に際して、$\int \frac{1}{r^2} \log r\, dx$, $\int \frac{1}{r^4} \log r\, dx$という、一般に初等関数で表わせない関数が現われたが、これはrとXの関係を用いて三角関数を含む形に変形させることで一応の数値化に成功した。

以上の様に数値積分を行なったが、これによる精度の低化は先ず考えられない。

5. 結言

前述した方法により、実際の解析を行なった。尚、解析例とその考察については、当日発表の予定である。

〈参考文献〉

1) A.Cemal Eringen Fracture (ed.by H.Liebowitz) vol2, ch.7 Academic press , 1968

2) 福井卓雄 Linear Micropolar Elasticity における二次元Kelvin問題の解 , 1976