

間接型積分方程式法における“はみだし法”の効果について^{1,2)}

福井大学工学部 正 員 福井 卓雄
福井大学大学院 学生員 ○岩佐 晃男
福井大学大学院 学生員 登 悦男

1. はじめに

積分方程式法においては、各種の定式化がなされるが、ここでは、一重層ポテンシャルを用いた定式化を行う。一般に、ここで定式化される積分方程式は解析解を得ることが困難であり、数値的に近似解を求めるのが普通である。つまり、積分方程式による解の精度は、数値的に解くときの近似（境界形状と密度の近似）の精度に依存するものである。

また、近似解を求める上で問題となる点は、隅角部での特異性であり、この特性は隅角の幾何学的形状と密度の値に関連している。したがって解析解の精度を向上させるためには、隅角部での近似解の性質を、実際の解の性質に少しでも近づけるようにすることが必要である。

本研究では、上で述べた事を考慮し、隅角部での近似法として“はみだし法”を提案し、その効果について述べる。

2. 隅角部での密度の近似的評価（はみだし法）

特異点までの距離を r とすると積分方程式により求めた解は、 $\log r$ 程度の特異性をもつのが普通であり、この特異性は隅角での密度の値によって決まる。このことは、基本解を隅角付近で Taylor 展開することによって明らかになる。

たとえば、平板問題においては、特異性が消えるのは、特殊な場合、即ち(1) $\alpha = \pi/2$ (2) $\alpha = \pi$ または $3\pi/2$ かつ $\alpha = \alpha^*$ (3) $\alpha = \pi$ かつ $\alpha = \alpha^*$ の時である。²⁾ (ここで α は無限板において境界 ∂B 上の法線方向のモーメント分布である。) 図.1 また、この特異性は r が大きくなると共に激減するものであり、したがって、解析精度を向上させるためには全体の密度分布を高次関数で近似することよりも、むしろ隅角部での解の乱れがなるべく内部に及ばないようにするか、または乱れを消去してしまうことである。そこで隅角部での密度の近似法として“はみだし法”を提案する。この方法は、積分方程式の値が隅角において発散しないように、密度分布を領域外へ少し延長するものである。図.2 は、なにも手を加えない場合 (Original) と、“はみだし法”を用いた場合 (Modified) の比較を行ったものであり、隅角部での特異性

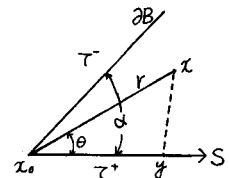


図.1

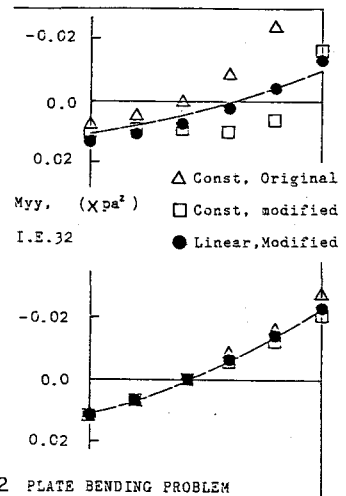


図.2 PLATE BENDING PROBLEM
a uniformly loaded rectangular plate
with two edges simply supported
and the other edges clamped.

の内部への影響がおさえられているのがよくわかる。

3. 境界形状の近似的評価

今までは、すべての境界に対して直線近似を行っていたが、曲線境界を有する場合、この直線近似では自ら隅角を有することになる。2.のことを考慮すると、このことは隅角部での特異性を生み出すことになり、解の精度を低下させる原因となりがねない。したがって、曲線境界においては曲線近似する必要がある。このことを確かめるために、曲線境界に対して境界要素を3次スプライン関数を用いて近似を行った。この3次スプライン関数は、一般に多項式に比べ振動が少なく、補間や数値微分に適していると考えられているものである。

図3は"ひょうたん形"の断面を有する棒のねじり問題における密度分布を区間要素を直線近似したものとの3次スプライン関数によって近似したものとの比較を行ったものである。図からわかるように境界を曲線で近似することによって、

要素分割が少なくても、曲率の大きな境界上に対し、かなりなめらかな密度分布を示していることがわかる。このことは、解の精度向上に寄与しているものと考えられる。

図4は、境界上のせん断応力を示したものであるが、境界を曲線近似することの有用性を示している。

4. 結論

2.3.からの結論として、(1)境界密度の近似においては、隅角部を有する場合、隅角部での特異性を回避する必要がある、その一手法として"はみだし法"が有効である。(2)境界形状の近似においては、境界形状に忠実に行く。つまり、曲線境界においては、隅角部を生み出さないためにも曲線近似を行うことが必要である。尚、曲線近似する上で、3次スプライン関数の使用が有効である。

以上を示した手法により、任意の境界形状を有する境界値問題に対して、間接型積分方程式法は、より実際的となる。

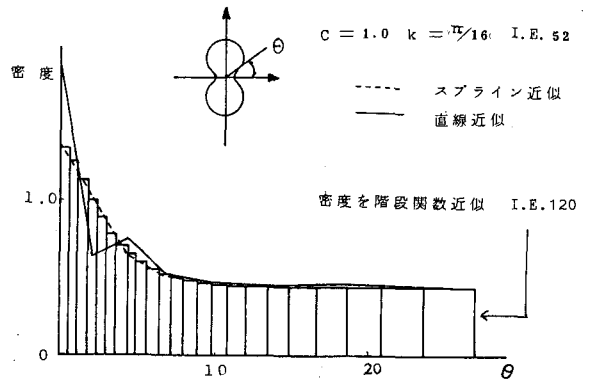


図3 TORSION PROBLEM 密度分布
curve C is given in terms of the parameter u by the equations
 $x/(x^2+y^2)=1/c \cdot \cosh k \cdot \cos u$
 $y/(x^2+y^2)=1/c \cdot \sinh k \cdot \sin u$

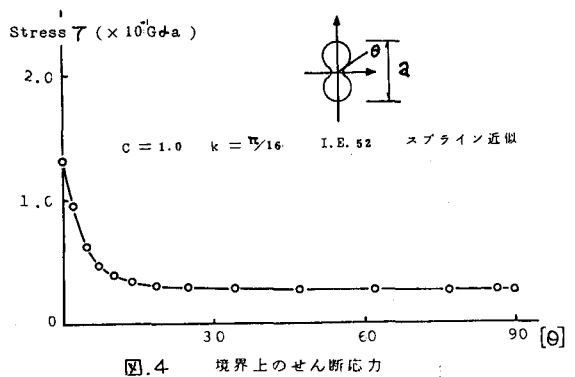


図4 境界上のせん断応力

- 参考文献 1) 福井卓雄 土木学会第36回年次学術講演概要集 第1部 PP17~18 (1981)
2) 福井卓雄・若佐晃男 土木学会第37回年次学術講演概要集 第1部 PP279~280 (1982)