複雑な特異核を有する積分方程式の数値解法について

福井大学工学部　正員　福井卓雄

Micropolar弾性体，棒による弾性体の補剛問題などに現われる，複雑な特異核を有する積分方程式の数値解法について考察する。

未知関数を f，既知関数を g とする。特異核 Γ を有する積分方程式

$$\mu f(x) + \int_a^b \Gamma(x,y) f(y)\,dy = g(x) \qquad (1)$$

を数値的に解析する場合を考える。通常おこなわれるように，未知関数を $f(x) \simeq \sum f_i \phi_i(x)$ と近似すると，式(1)の左辺の積分は，

$$\int_a^b \Gamma(x,y) f(y)\,dy \simeq \sum_i f_i \int \Gamma(x,y)\,\phi_i(y)\,dy = \sum_i f_i\,\Phi_i(x) \qquad (2)$$

と近似される。積分方程式の数値解法では，積分 Φ_i の精度がそのまま解の精度につながる。核が初等関数で表されており，ϕ_i が多項式で，積分区間が単純である場合には，積分 Φ_i は比較的容易に解析的に評価できるが，核が複雑な場合には，Φ_i を精度良く求めるためには，何らかの工夫が必要である。ここでは，(1) 平面Micropolar弾性問題，(2) 棒による半無限弾性体の補剛問題，(3) 曲線境界の取り扱いにおける問題，において試みた Φ_i の評価法について報告する。

<u>方法の概要</u>　ここで扱う問題では，積分核の特異性は，いずれも対数ポテンシャルと同等の性質を持つ。そこで，積分核 Γ を特異部分 Γ_0 と regular な部分 $\tilde{\Gamma}$ とに分解すれば，

$$\Phi_i(x) = \int \Gamma_0(x,y)\,\phi_i(y)\,dy + \int \tilde{\Gamma}(x,y)\,\phi_i(y)\,dy \qquad (3)$$

となる。Γ_0 として解析的に積分可能なものを選んでやれば，第一項の積分については問題はない。第二項については，適当な関数で近似するとか，数値積分を行なうとかしてもあまり精度は低下しないと考えられる。以下，上に挙げた各問題に試みた方法を述べる。

<u>(1) Micropolar弾性体</u>　平面問題において積分方程式は3元連立となる。変位境界値問題をいわゆる一重層ポテンシャルにより扱う場合には，積分核は，

$$\Gamma_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{1}{2\pi G}\left[\delta_{\alpha\beta}\log\frac{1}{r} + \frac{1}{8(1-\nu)}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\{r^2(\log r - 1)\}\right] + \frac{\ell^2}{2\pi G} e_{3\alpha\lambda} e_{3\beta\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\{\log\frac{1}{r} - K_0(\frac{r}{\ell_1})\}$$

$$\Gamma_{\alpha 3}(x,y) = -\frac{e_{3\alpha\lambda}}{4\pi G}\frac{\partial}{\partial x_\lambda}\{\log\frac{1}{r} - K_0(\frac{r}{\ell_1})\},\quad \Gamma_{3\alpha}(x,y) = -\Gamma_{\alpha 3}(x,y),\quad \Gamma_{33}(x,y) = \frac{1}{8\pi G \ell^2} K_0(\frac{r}{\ell_1})$$

となる。ここに，$r^2 = (x_\alpha - y_\alpha)(x_\alpha - y_\alpha)$，$G, \nu, \ell, \ell_1$ は材料定数であり，添字は1, 2の値をとる。K_0 は第二種0次の変形Bessel関数である。変形Bessel関数に関係する項は，その微

Takuo FUKUI

係数も含めて，すべて0次と1次の関数で表わされる。これらを特異部分とregular部分とに分ける。

$$K_0(z) = \log\frac{1}{z} + \tilde{K}_0(z), \qquad K_1(z) = \frac{1}{z} + \tilde{K}_1(z)$$

ここでは，$\tilde{K}_0(z)$，$\tilde{K}_1(z)$ を3次B-splineで近似し，その区分多項式と解釈して，以後の積分の評価は解析的に行なった。積分 Φ_i の評価は，その区間ごとにあらかじめ求めておいた係数をかけて加え合わせれば良い。

(2) 半無限弾性体中の補剛棒の問題　たとえば，軸力問題の場合には，積分核は，

$$\Gamma(x,y) = \frac{1}{(1-\nu)a^3}\{(1-2\nu)a^2[R_2(|x-y|) - R_2(x+y)] + a|x-y|R_3(|x-y|)$$
$$- a[y+(1-4\nu)x]R_3(x+y) - 2xyR_4(x+y)\} \qquad (x, y > 0)$$

となる。ここに，a，ν は定数であり，$R_2 \sim R_4$ は完全楕円積分 K，E を用いて

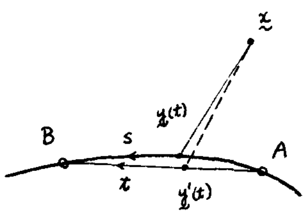
$$R_2(t) = \frac{1}{\pi k}[(2-k^2)K(k) - 2E(k)], \qquad R_3(t) = -\frac{tk}{2\pi a}K(k) + \frac{a(2-k^2)}{\pi t k}E(k)$$
$$R_4(t) = \frac{k^3}{4\pi}K(k) + \frac{k}{2\pi}[2(\frac{a}{t})^2 - k^2]E(k), \qquad k = \frac{2a}{\sqrt{t^2+4a^2}}$$

と表わせる。$t \to 0$ のとき，完全楕円積分は $K(k(t)) = -\log\frac{t}{8a} + O(t^2\log t)$，$E(k(t)) = 1 + O(t^2\log t)$ の性質を有するので，式(3)の Γ_0 に対応するものとして，

$$\Gamma_0(x,y) = -\frac{1-2\nu}{\pi(1-\nu)a}\log\frac{|x-y|}{x+y}$$

を選ぶことができる。この場合には，regular部分の積分の評価はGauss積分によった。

(3) 曲線境界を有する弾性ねじり問題　一重層ポテンシャルによる場合，核は対数であるが，一般の曲線上では積分 Φ_i は，解析的には求まらない。境界曲線を図のようにパラメーター表示し，境界上の値は点A，Bでだけ評価することにした。



このとき，

$$\Gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \log\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}(t)|} = \log\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}'(t)|} + L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(t))$$

と表わすことができ，式(3)は

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}) = \int\log\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}'(t)|}\phi_i(\boldsymbol{y}(t))\frac{ds}{dt}dt + \int L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(t))\phi_i(\boldsymbol{y}(t))\frac{ds}{dt}dt$$

と書ける。$\phi_i\frac{ds}{dt}$ を適当な t の多項式で表わせば，オ一項は解析的に評価できる。オ二項の積分はGauss積分により評価した。

以上の方法で，種々の問題において比較的良い結果を得ることができた。具体的な数値結果ならびにこの方法の問題点の検討については，当日発表する。