積分方程式法による特異性を有する境界値問題の解析

京都大学工学部　正員　小林昭一
京都大学工学部　学生員　○川上　隆

1、はじめに

本論文は、積分方程式法を用いて特異性を有する境界値問題を解析する場合の数値解の精度向上を図るものである。本解析では、波動方程式の定常問題(Helmholtz 方程式)を対象として、混合境界及び角のある境界について、前者は、グリーン公式，後者は、ポテンシャル理論を用いて積分方程式を定式化したものである。

2、混合境界値問題

対象とする問題の境界条件は、Seで変位，Sfで表面力が与えられている(fig.1)。SeとSfの境界$A_m (m=1,2)$では、解は一般に特異挙動を示す。Helmholtz 方程式の特異解は、次のように与えられる。

$$u_s^m(y) = \alpha_m J_{\frac{1}{2}}(k r_m) \sin\frac{\theta_m}{2}, \quad t_s^m(y) = \alpha_m \mu \frac{\partial u_s^m(y)}{\partial n_y}$$

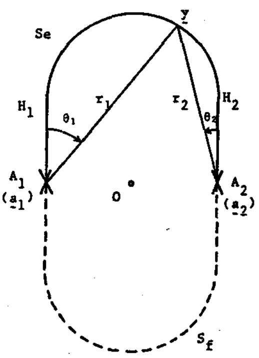

fig.1

ここに、y：原点Oからの位置ベクトル，$r_m = |y - a_m|$，θ_1：A_1のA_1H_1の方向から時計回りに測る，θ_2：A_2のA_2H_2の方向から反時計回りに測る，k：波数，μ：弾性定数，J_n：n次バッセル関数，$\frac{\partial}{\partial n_y}$：$y$での法線微分，$u$：変位，$t$：表面力，$\alpha_m$：未定定数

つまり、t_s^mは、A_mにおいてSe上で$r_m^{-\frac{1}{2}}$のオーダーで特異性を持ち、一方、Sf上では0となり、不連続となってる。今、積分方程式は、境界上で

$$\frac{1}{2} u(x) = \int_S \left\{ \Gamma(x,y) \frac{1}{\mu} t(y) - u(y) \Gamma_I(x,y) \right\} dS_y$$

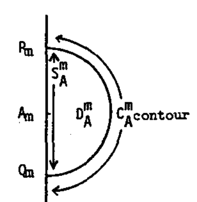

fig.2

となる。Γ, Γ_Iは、1重層及び2重層ポテンシャルの核であって、Helmholtz方程式の基本解となっている。ところが、S_A^m(A_m点近傍)では、t_s^mに特異性が生じるために積分ができない。そこで、S_A^m上に限っては、$u = u_s^m + u_R$，$t = t_s^m + t_R$として、特異性の生じる部分とそうでない正則な部分とに分けて考える。問題となるのは、

$$I_m = \int_{S_A^m} \left\{ \Gamma(x,y) \frac{1}{\mu} t_s^m(y) - u_s^m(y) \Gamma_I(x,y) \right\} dS_y$$

の積分であるが、これについては、fig.2に示すように、C_A^m contour[1]での積分に置き換える(P_m, Q_mは、A_mの両隣りの要素点。C_A^mは中心A_m、半径A_mP_mの半円。S_A^mはP_m−A_m−Q_m区間の境界。D_A^mは境界$S_A^m + C_A^m$の内部)。さて、境界$S_A^m + C_A^m$で次式の積分方程式を組む。

$$F(x) u_s^m(x) = \int_{S_A^m + C_A^m} \left\{ \Gamma(x,y) \frac{1}{\mu} t_s^m(y) - u_s^m(y) \Gamma_I(x,y) \right\} dS_y \quad \begin{cases} F(x) = 0 & x \notin D_A^m + C_A^m + S_A^m \\ F(x) = \frac{1}{4} & x \text{ at } P_m, Q_m \end{cases}$$

Shoichi KOBAYASHI　Takashi KAWAKAMI

C_A^m contour 上においては、t_s^m, u_s^mは正則なので、

$$I_m = -\int_{C_A^m}\left\{\frac{1}{\mu}\Gamma(x,y)\, t_s^m(y) - u_s^m(y)\Gamma_t(x,y)\right\} dS_y$$

となって求めることが可能となる。ただし、u_R, t_Rに関しては、S_A^m上で積分する。

次にu, tの補間は、S_A^m上以外のu、t及びS_A^m上のu_R, t_Rに関して2次式を用いたBスプライン補間を行なうが、A_mでの表面力の不連続性は、S_A^m上のu_R, t_Rにu_s^m, t_s^mを足し合わせて表される(fig.3)。重複している斜線部は、エルミートの補間をして差し引くことにする。具体例として、解を次式で与え、これに対応する数値解を検討する。

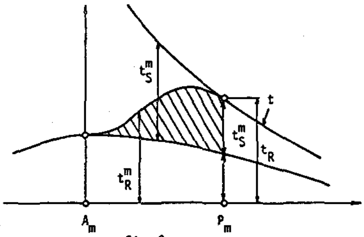

fig.3

$$u(y) = J_0(kr) + \sum_{m=1}^{2} J_{\frac{1}{2}}(kr_m)\sin\frac{\theta_m}{2} \qquad r=|y|$$

境界を離散化し、代数方程式を解く。上式により、S_eで変位、S_fで表面力を与える。すると、未知数は、S_e上各要素点の表面力、S_f上の変位及びu_s^mの係数α_mとなる。 table 1に示したのは、S_A^mにおいてC_A^m contourを用いた場合とそうでない場合との数値解の比較である(table1, fig.4：Aは、contourを用いたときの数値解の解析解との誤差，Bは用いなかったときの誤差である。1〜5：表面力誤差　6〜10：変位誤差　$ka=1$)。

table 1
elements 80

NO.	A(%)	B(%)
1	-0.19	-0.38
2	-0.11	-0.28
3	0.16	0.14
4	1.79	2.26
5	-1.01	50.6
6	-0.80	-4.37
7	-0.23	2.58
8	-0.13	4.77
9	-0.16	6.70
10	-0.07	7.70

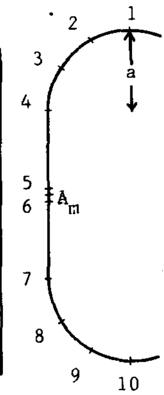

fig.4

3、角のある境界値問題

一般に応力境界値問題に対して1重層ポテンシャルを用いた積分方程式は、次のようになる[2)]。

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = \frac{1}{2}\varphi(x) + \int_S \frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial n_x}\varphi(y)\,dS_y \qquad \varphi：密度関数$$

しかし、x、yが角にくるとポテンシャル密度φに特異性が生じる。この場合にも混合境界値問題と同様、特異点近傍にcontourを用いることによって数値解析が可能となる。解析例としては、fig.5の正方形領域を考え、応力境界値問題を解く。解としては、$u(y)=J_0(kr)$　$r=|y|$を考えた($ka=2$)。詳細は、当日発表することとし、ここでは、解析結果のみをtable 2に示しておく(Aは、数値解と解析解との誤差を示す)。

table 2
elements 16

NO.	A(%)
1	0.34
2	0.25
3	0.24
4	0.25
5	0.34

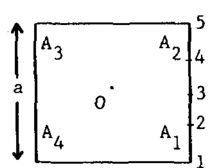

fig.5

〈参考文献〉

1) J.O.WATSON: "HERMITIAN CUBIC BOUNDARY ELEMENTS FOR PLANE PROBLEMS OF FRACTURE MECHANICS" Res Mechanica 4,(1982) 23-42

2) 福井卓雄，徳村秀二；"積分方程式法の解析精度(特異境界点付近での精度の向上について)"　土木学会　関西支部講演概要集，1982