静弾性学に於ける諸ポテンシアルの境界値について

京大工　正　小林昭一
京大工　正　○西村直志

1 序

積分方程式法を用いる場合，諸ポテンシアルの境界値を求めねばならない事がある．本報では定数係数楕円形2階偏微分作用素について各ポテンシアル，及びその境界値を求める．特に方程式の主部のみを考えて，表題の如く静弾性学のポテンシアルを扱うと考えて差支ない．なお考える曲面Sは十分滑らかなものとする．空間はN次元（$N=2$ or 3）とする．

2 準備，及び問題設定

本報では，(m,n)斉次関数なる概念を用いる．即ち，$f(x)$が(m,n)斉次関数であるとは，$f(\lambda x)=\lambda^m|\lambda|^n f(x)$（$^\forall\lambda\in R\neq 0$）となる事を意味する．この用語によれば，$(n,0)$斉次関数の$\mathcal{F}$変換は$(-n,-N)$斉次関数になる．ただし$-N<n<0$.[1]

さて，静弾性学の作用素$\Delta^*(\nabla)u:=\mathrm{div}(C\cdot\nabla u)$（$C$：弾性常数）の基本解，即ち$\Delta^*(\nabla)\Gamma(x)=-1\delta(x)$（$1$：単位テンソル，$\delta(\cdot)$：Dirac delta）なる解$\Gamma$は，$\mathcal{F}$変換を施せば$\mathcal{F}\Gamma=\hat{\Gamma}=\Delta^{*-1}(\xi)$となる．ここに$\xi$は$\mathcal{F}$変換のパラメータである．$\Delta^{*-1}(\xi)$は$(-2,0)$斉次である．従って$\widehat{\nabla\Gamma}$，$\widehat{\nabla\nabla\Gamma}$は各々$(-1,0)$，$(0,0)$斉次である．一般に，ポテンシアルとしては一重層$\int_S\Gamma(x-y)\varphi(y)dS_y$，二重層$\int_S(\overset{n}{T}\Gamma)^T(x-y)\varphi(y)dS_y$（$\overset{n}{T}u:=(C\cdot\nabla u)n$）及びそれらの微分を考えておけば実用上十分であるので，以下次の問題を解く事を考える：$\int_S F(x-y)\varphi(y)dS_y$に於いて$\underset{\notin S}{x}\to x_0\in S$とした時の極限値を求める．ここに$F$は$\hat{F}$が$(n,0)$斉次である（$-2\leq n\leq 0$）核である．

3 解答

i) $n=-2$の場合，$N=3$では2で述べた様にFは$(2,-3)=(0,-1)$斉次，また$N=2$では一般に$|F(x)|\leq C_1+C_2|\log|x||$となる事が知られており[1]（$C_1,C_2$：定数），いずれにせよ$S$上一様可積分だから，求める極限は$\int_S F(x_0-y)\varphi(y)dS_y$（$x_0\in S$）となる．

ii) $n=-1$の場合，Fは$(1,-N)$斉次である．従ってFは点x_0近傍以外では普通の「関数」である．そこで，以下点x_0の近傍のみを考える事にする．この近傍を十分小さく取れば，これをx_0に於けるSの接平面に置換えても良いであろう．以下，x_0を原点とするn（法線）方向をx_N軸とするCartesian座標を用いる．まず次の部分$\mathcal{F}$変換を導入する：

$$\hat{F}(\xi_\alpha|x_N)=\frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi_N x_N-\epsilon\xi_N^2}\hat{F}(\xi_\alpha,\xi_N)\,d\xi_N,$$

ここに$e^{-\epsilon\xi_N^2}$は収束因子である．$\hat{F}$が$(-1,0)$斉次である事を考慮すれば，この積分は次の様に評価される：（$\hat{F}(\xi)-\hat{F}(0,1)/\xi_N$は$\xi_N$に関して$o(1/|\xi_N|)$，$|\xi_N|\to\infty$である事に注意.）

Shoichi KOBAYASHI & Naoshi NISHIMURA

$$\hat{F}(\xi_\alpha|x_N) = \frac{i}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\hat{F}(0,1) + \mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\hat{F}(\xi) - \frac{\hat{F}(0,1)}{\xi_N}\right)e^{i\xi_N x_N}d\xi_N,$$

ここに$\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}$は，上，中，下各々$x_N>0$，$=0$，$<0$，v.p. は主値を示す．それゆえ

$$\lim_{x_N\to 0}\hat{F}(\xi_\alpha|x_N) = \pm\frac{1}{2}\hat{F}(0,1) + \hat{F}(\xi_\alpha|0) \quad (\text{複号は上,下各々 } x_N>0, <0 \text{ からの極限})$$

となる．特に$\hat{F}(\xi_\alpha|0)$はξ_αについて$(-1,1)$斉次であり，従って$F(x_\alpha,0)$はx_αに関する$N-1$次元超関数として主値積分となるので[1]，Invariant な表示として次式を得る：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ S}}\int_S F(x-y)\varphi(y)dS_y = \pm\frac{i}{2}\hat{F}(n)\varphi(x_0) + \mathrm{v.p.}\int_S F(x_0-y)\varphi(y)dS_y. \quad ①$$

iii) $m=0$ のとき，ii)と同様にすれば次の結果を得る：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ S}}\int_S F(x-y)\varphi(y)dS_y = \pm\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N-1}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\hat{F}(\xi)\Big|_{\xi=n}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\varphi(x)\Big|_{x=x_0} + \mathrm{p.f.}\int_S F(x_0-y)\varphi(y)dS_y, \quad ②$$

ここに p.f. は有限部分を示し，今の場合には

$$\mathrm{p.f.}\int_{R^{N-1}}F(x_\alpha,0)\varphi(x_\alpha)dx_\alpha = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\left[\int_{R^{N-1}\setminus B_\epsilon}F(x_\alpha,0)\varphi(x_\alpha)dx_\alpha - \frac{\varphi(0)}{\epsilon}\int_{S^{N-1}}F(x_\alpha,0)dS\right]$$

である．またB_ϵは原点中心半径ϵの球，S^{N-1}は$N-1$次元単位球面を表わす．なお$F(x_\alpha,0)$はx_αについて原点以外で$(0,-N)$斉次関数である．従って対称性から p.f. の存在条件

$$\int_{S^{N-1}}F(x_\alpha,0)x_\beta dS = 0, \qquad 0\le\beta\le N-1$$

が満たされている事がわかる．

4 応用

次の諸結果は式①，②から直ちに出る．これらは等方性，異方性に関らず成立する：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ S}}\partial_i\int_S \Gamma_{jk}(x-y)\psi_k(y)dS = \mp\frac{1}{2}n_i\Delta^{*-1}_{jk}(n)\psi_k(x_0) + \mathrm{v.p.}\int_S\partial_i\Gamma_{jk}(x_0-y)\psi_k(y)dS_y, \quad ③$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ S}}\partial_i\int_S(\overset{n}{T}\Gamma)^T_{jk}(x-y)\psi_k(y)dS_y = \pm\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N-1}\left(\delta_{i\alpha}\frac{\partial\psi_j}{\partial x_\alpha}(x_0) - n_i\Delta^{*-1}_{jm}(n)C_{msk\alpha}n_s\frac{\partial\psi_k}{\partial x_\alpha}(x_0)\right)$$
$$+\mathrm{p.f.}\int_S\partial_i(\overset{n}{T}\Gamma)^T_{jk}(x_0-y)\psi_k(y)dS_y. \quad (x_0\in S) \quad ④$$

特にSがDの境界∂D，ψ，φがD内の$\Delta^*(\nabla)u=0$を満たす場uの境界値，及び$\overset{n}{T}u$の境界値に等しい場合，式③，④，及び Green 公式から$\underset{S}{x\to x_0}$の近づき方にかかわらず

$$0 = -\frac{I_{pq}}{2} + \mathrm{v.p.}\int_S C_{pqij}\partial_i\Gamma_{jk}\overset{n}{T}u_k dS - \mathrm{p.f.}\int_S C_{pqij}\partial_i(\overset{n}{T}\Gamma)^T_{jk}u_k dS \quad \text{on } S \quad ⑤$$

を得る．式⑤は$N=3$の等方性の場合，文献2)に於いて直接計算により得られている．しかし上の様にして，一般の異方性の場合も予想通り正しい事がわかる．この様にほとんどの極限計算は基本解を陽に求めなくても実行可能である．

文献 1) 溝畑茂：偏微分方程式論，岩波，(1965)，2) Cruse, T.A. & Van Buren, W.: Int. J. Fracture Mech., 7, (1971).