平面ネットワークにおける多種流問題について

大阪市立大学工学部　正員○岡村治子
大阪市立大学工学部　正員　西村昂

1、はじめに

道路網に一定のOD構成比を与えたときの最大フローTは、道路網のグラフが平面であるとき、一部求められている。すべての始点と終点が外周上にあるとき（参考文献[1][2]）又、n_1組の始点と終点が外周上にあり、他のn_2組の始点又は終点が外周上の1点のとき（参考文献[3][4]）等である。ここでは、グラフが平面で、n_1組の始点と終点が外周上にあり、他のn_2組の始点と終点が1つの面の周上にあるときに求める。これは交通処理能力の評価に関する1つの基礎理論となるものと言える。

グラフを$G=(V,X)$で表わす。Vは点の集合、Xは辺の集合とする。単位OD表(P_{ij})は対称$(P_{ij}=P_{ji})$であるとし、点iとjを接合する辺(i,j)の片側車線の容量をC_{ij}とする。Vの部分集合Kに対して、Kの点とV−Kの点とを結ぶ辺の集合を$\omega(K)$で表わしカットとよぶ。カット$\omega(K)$の容量$\sum_{(i,j)\in\omega(K)} C_{ij}$を$C(K)$であらわす。カット$\omega(K)$の断面交通$\sum_{\substack{i\in K,\, j\in V-K \\ i\leq j}} P_{ij}$を$Q(K)$であらわす。このとき最大フローは、

$$T=\min_{\omega(K)}\left\{C(K)/Q(K)\right\}$$

であり、C_{ij}，TP_{ij}（$=f_{ij}$とおく）が偶数であるときは、フローは整数で選べる。（証明は[4]を参照。）ここではTを配分するアルゴリズムを考える。$T=C(K)/Q(K)$となる$\omega(K)$を臨界カットとよぶ。

2、アルゴリズム

辺の向きを考えずに配分するのでf_{ij}とf_{ji}を同一視し、$f_{ij}=f_{ji}=\alpha$とする。αの片側車線への配分を考える（もう1つの車線に同様にしてαを配分できるので、ここでは省略する）。C_{ij}，f_{ij}は偶数とする（そうでないときは、適当に定数βをかけ、最後に1単位を$1/\beta$にすればよい）。外周と、始点と終点のあるもう1つの面の周を、D_1，D_2とおく。

step1　$f_{ij}>0$ $(j=j_1,\cdots,j_\ell)$で点iに接合する容量が正の辺が(i,k)1つしかないとき、(i,k)にf_{ij} $(j=j_1,\cdots,j_\ell)$を流し、Reset $f_{ij}=0$，$f_{kj}=f_{kj}+f_{ij}$ $(j=j_1,\cdots,j_\ell)$，$C_{ik}=0$

step2.　$f_{ij}>0$，$C_{ij}>0$となるi,jがあるとき、(i,j)にf_{ij}を$\min\{C_{ij},f_{ij}\}$（$=\gamma$とおく）流し、Reset $f_{ij}=f_{ij}-\gamma$，$C_{ij}=C_{ij}-\gamma$

step3.　step1，2の場合がなく、$f_{ij}>0$でi,jがD_1又はD_2にあるとき（今D_1とする）、D_1上でiの隣の点をk，ℓとする。次の2つのケースがある。

(1) $k\in K$，$i,j\notin K$であるような臨界カット$\omega(K)$がないとき、(i,k)にf_{ij}を1流す。
Reset $f_{ij}=f_{ij}-1$，$f_{kj}=f_{kj}+1$，$C_{ik}=C_{ik}-1$

(2) $k\in K_1$，$i,j\notin K_1$，$\ell\in K_2$，$i,j\notin K_2$であるような臨界カットK_1，K_2があるとき

Haruko OKAMURA, Takashi NISHIMURA

D_1の点の個数が最小になるようにK_1, K_2を選ぶ。K_1又はK_2はD_2の点を含まない(今K_1とする)。$a \in K_1$, $b \in V-K_1$で$f_{a,b}>0$となるa, bを、iを通ってD_1上のkとbのきまりが最小になるように選ぶ。$f_{a,b}$を(k,i)に1流し、Reset $f_{a,b}=f_{a,b}-1$, $f_{a,k}=f_{a,k}+1$, $f_{i,b}=f_{i,b}+1$, $C_{i,k}=C_{i,k}-1$

step 4　$f_{i,j}>0$となるi, jがないときはstop。あるときはstep 1へ。

3. 例

図-1のようなGを考える。

すべての辺に対して$C_{i,j}=2$とする。

OD表は

O \ D	1	2	3	4	5	6	8	10
1	0	0	0	1/8	0	0	0	0
2	0	0	0	0	1/8	0	0	0
3	0	0	0	0	0	1/8	0	0
4	1/8	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1/8	0	0	0	0	0	0
6	0	0	1/8	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1/8
10	0	0	0	0	0	0	1/8	0

とする。

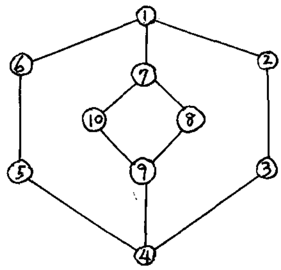

図-1

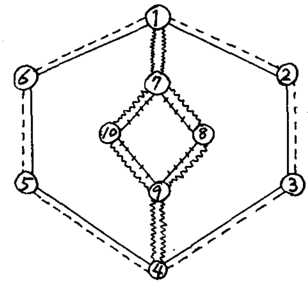

図-2　$f_{1,4}$　$f_{2,5}$　$f_{3,6}$　$f_{8,10}$

このとき　$T=16$, $f_{1,4}=f_{2,5}=f_{3,6}=f_{8,10}=2$

臨界カットを与えるKは$\{2,3\}$, $\{1,2,6,7,8\}$等である。D_1は$1\to2\to3\to4\to5\to6\to1$, D_2は$7\to8\to9\to10\to7$.

アルゴリズム

step 1, 2　なし

step3　$f_{1,4}>0$, (2), $K_1=\{2,3\}$, $b=6$, $a=3$, $f_{3,6}$を(2,1)に1流し. Reset $f_{3,6}=1$, $f_{3,2}=1$, $f_{1,6}=1$, $C_{2,1}=1$

step2　$f_{1,6}$を(1,6)に1流し　Reset $f_{1,6}=0$, $C_{1,6}=1$
$f_{3,2}$を(3,2)に1流し　Reset $f_{3,2}=0$, $C_{3,2}=1$

step3　$f_{1,4}>0$, (2), $K_1=\{5,6\}$とする. $b=2$, $a=5$, $f_{2,5}$を(1,6)に1流し Reset $f_{2,5}=1$, $f_{5,6}=1$, $f_{1,2}=1$, $C_{1,6}=0$

step1　$f_{3,6}$を(6,5)(5,4)に$f_{2,5}$を(4,5)に流して
Reset $f_{6,3}=f_{2,5}=0$, $f_{4,2}=1$, $f_{4,3}=1$, $C_{6,5}=C_{5,4}=0$

step2　$f_{4,3}$を(4,3)に1流して Reset $f_{4,3}=0$, $C_{4,3}=1$
$f_{1,2}$を(1,2)に1流して Reset $f_{1,2}=0$, $C_{1,2}=0$

step1.　$f_{2,4}$を(2,3)(3,4)に流して Reset $f_{2,4}=0$, $C_{2,3}=C_{3,4}=0$
$f_{1,4}$を(1,7), (4,9)に流して Reset $f_{1,4}=0$, $f_{7,9}=2$
$C_{1,7}=C_{4,9}=0$

step3　$f_{7,9}>0$, (1), (7,10)に1流し
Reset $f_{7,9}=1$, $f_{10,9}=1$, $C_{7,10}=1$

step2　$f_{10,9}$を(10,9)に1流し. Reset $f_{10,9}=0$, $C_{10,9}=1$

step3.　$f_{7,9}>0$, (1), (7,8)に1流し.
Reset $f_{7,9}=0$, $f_{8,9}=1$, $C_{7,8}=1$

step2.　$f_{8,9}$を(8,9)に1流し. $f_{8,9}=0$, $C_{8,9}=1$

step3, 2とをくりかえして　$f_{8,10}$を(8,7)(7,10)に1 (8,9), (9,10)に1流す.

step5.　stop.　図-2の配分がえられた。

4. あとがき

アルゴリズムを改良することが今後の課題である。

5. 参考文献

[1] 岡村・西村「平面ネットワークにおける多種流問題に関する一考察」土木学会関西支部年次学術講演会概要 昭和54年

[2] Okamura and Seymour, Multicommodity flows in planer graphs, J. Combinatorial Theory Series B Vol. 31, 1981, 75-81

[3] 岡村・西村「平面ネットワークにおける多種流問題」土木学会関西支部年次学術講演会概要 昭和56年

[4] Okamura, Multicommodity flows in graphs, Discrete Aplied Mathematics, to appear