異方性粘土の多次元圧密に関する一考察

京都大学工学部　正員　田村　武

1. はじめに

多次元圧密を解析的に解こうとするとき，多くの場合その扱いの困難さから粘土構造骨格の等方性を仮定している。　しかし，実際の成層地盤では何らかの異方性を呈するのが普通である。　応力－ひずみ関係ばかりでなく，透水係数にも異方性があることは当然であるが，ここでは前者のみに注目し，その影響を調べることを目的とする。　とくに最も簡単な軸対称境界値問題を対象とし，一般的な解の誘導法について述べる。

2. 圧密の方程式

z－方向を成層面とするような横等方性弾性体の応力－ひずみ関係は(1)のように表わすことができる。　ここに $c_1 \sim c_5$ は独立な弾性定数であって，とくに等方性の場合には Lamé 定数により　$c_1 = c_5 = \lambda + 2\mu$，$c_2 = c_4 = \mu$，$c_3 = \lambda$　と帰着される。

図－1に示すような中空円柱領域に対し

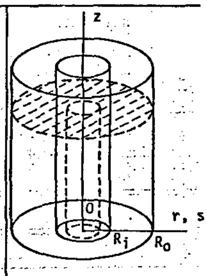
(i) 鉛直ひずみ ε_z は一様，

(ii) 間げき水は水平方向のみに流れ，内周面 $r = R_i$ で排水される，

(iii) 外周面 $r = R_o$ で水平変位固定

なる仮定のもとで，圧密の方程式を求めると(2)のようになる[1]。　ここで積分核 Ⓗ(r,s) は(3)である。(3)の中の C は，弾性定数と外径と内径の比 $n\ (= R_o/R_i)$ によって(4)のように定まるパラメータである。　(3)を(2)に代入したあと $kc_1t/\gamma_w R_o^2$ を時間係数として改めて t と書くと(5)のような無次元化した方程式となる。ここで，k は透水係数，γ_w は間げき水の単位体積重量である。

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_1-2c_3 & c_3 & & & \\ c_1-2c_3 & c_1 & c_3 & & 0 & \\ c_3 & c_3 & c_5 & & & \\ & & & c_4 & & \\ & 0 & & & c_4 & \\ & & & & & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \cdots (1)$$



図－1

$$\int_{R_i}^{R_o} Ⓗ(r,s)\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}ds = -\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2 u(r,t) \qquad (2)$$

$$Ⓗ(r,s) = -\frac{1}{c_1}\delta(r,s) - \frac{C}{c_1}\frac{s}{R_o^2} \qquad (3)$$

$$C = \frac{2\{(c_1-c_3)^2 + c_2(c_1-c_5)(n^2-1)\}}{(1-\frac{1}{n^2})\{n^2c_2c_5 + c_5(c_1-c_2) - c_3^2\}} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,t) + C\int_{1/n}^{1}\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)\,s\,ds = \nabla^2 u(r,t) \qquad (5)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \eta^2[u + CI] = 0 \qquad (6)$$

$$u(r) = J_0(\eta r) + BY_0(\eta r) - CI \qquad (7)$$

$$I = \int_{1/n}^{1} r\,u(r)\,dr \qquad (8)$$

3. 固有値と固有関数

(5)に $u(r,t) = u(r)e^{-\eta^2 t}$ を代入すると $u(r)$ に関する方程式(6)を得るが，その一般解は(7)

Tamura Takeshi

である。　ここに J_0, Y_0はそれぞれ第一種，第二種0次のBessel関数である。　境界条件 $\frac{du}{dr}(1)=0$ より定数Bが $-J_1(\eta)/Y_1(\eta)$ となり，また(7)を(8)に代入してIが求まる。　よって(7)の解は(9)のように書くことができる。そして境界条件 $u(1/n)=0$ より η の方程式（固有方程式）(10)を得る。　これの解を小さい順に η_α ($\alpha=1,2,\cdots$) とすれば，それに対応する固有関数 u_α が(9)より定まる。

$$u(r)=J_0(\eta r)-\frac{J_1(\eta)}{Y_1(\eta)}Y_0(\eta r)+\frac{c\frac{1}{n}}{1+\frac{c}{2}(1-\frac{1}{n^2})}\frac{1}{\eta}\left\{J_1(\eta/n)-\frac{J_1(\eta)}{Y_1(\eta)}Y_1(\eta/n)\right\} \quad (9)$$

$$\frac{J_1(\eta)Y_0(\eta/n)-J_0(\eta/n)Y_1(\eta)}{J_1(\eta/n)Y_1(\eta)-J_1(\eta)Y_1(\eta/n)}=\frac{c\frac{1}{n}}{1+\frac{c}{2}(1-\frac{1}{n^2})}\frac{1}{\eta} \quad (10)$$

4. 解の構成

固有関数の集合の中に(11)なる内積を定義すると，任意の初期間げき水圧 u_0に対し(12)のような形式解の表現が可能である[2]。

$\langle u_\alpha,u_\alpha\rangle$ を求めるには，固有関数 u_α と固有関数でない $u_{\alpha'}$ を用意しておく。　ここで $u_{\alpha'}$ は(9)の形をしたものであるが，(10)を満たさない $\eta_{\alpha'}$より作られている。　u_α, $u_{\alpha'}$は共に元の方程式を満たすから(13),(14)と書ける。それぞれに $r u_{\alpha'}$, $r u_\alpha$をかけて積分すると(15)を得る。　ここで $\eta_{\alpha'}\to\eta_\alpha$ とすると $0/0$ となるので，いったん分母，分子を $\eta_{\alpha'}$で微分してから極限をとると(16)となる。　それぞれの要素を求めて代入すると，最終的に(17)を得る。ここで，S，Mは(18)，(19)により示してある。$M\to 0$ ，すなわち熱伝導の方程式になると $S\to 2n/\pi\eta_\alpha Y_0(\eta_\alpha/n)$ となることより(17)は(20)なる知られた解に帰着する。

一方，$u_0=1$とした場合，$\langle u_\alpha,u_0\rangle$ を求めることは容易であって(21)のようになる。

数値計算例については当日，発表する予定である。

$$\langle u_\alpha,u_\beta\rangle=\frac{1}{2}\int_{1/n}^{1}r u_\alpha u_\beta dr+\frac{c}{2}I_\alpha I_\beta \quad (11)$$

$$u(r,t)=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\frac{\langle u_\alpha,u_0\rangle}{\langle u_\alpha,u_\alpha\rangle}u_\alpha(r)\,e^{-\eta_\alpha^2 t} \quad (12)$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{du_\alpha}{dr}\right)+\eta_\alpha^2(u_\alpha+cI_\alpha)=0 & (13)\\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{du_{\alpha'}}{dr}\right)+\eta_{\alpha'}^2(u_{\alpha'}+cI_{\alpha'})=0 & (14)\end{cases}$$

$$\langle u_\alpha,u_{\alpha'}\rangle=\frac{1}{2n(\eta_\alpha^2-\eta_{\alpha'}^2)}\left.\frac{du_\alpha}{dr}\right|_{1/n}\left.u_{\alpha'}\right|_{1/n} \quad (15)$$

$$\langle u_\alpha,u_\alpha\rangle=-\frac{1}{4n}\left.\frac{du_\alpha}{dr}\right|_{1/n}\lim_{\eta_{\alpha'}\to\eta_\alpha}\left.\frac{d}{d\eta_{\alpha'}}u_{\alpha'}\right|_{1/n} \quad (16)$$

$$\boxed{\langle u_\alpha,u_\alpha\rangle=\frac{S}{2\pi n\eta_\alpha}\frac{Y_0(\eta_\alpha/n)}{Y_1^2(\eta_\alpha)}-\frac{S^2}{4n^2}+\frac{M}{2\eta_\alpha^2}\left\{\frac{2Y_1(\eta_\alpha/n)}{\pi Y_1^2(\eta_\alpha)}-\frac{(M/n+2)S^2}{2n}\right\}} \quad (17)$$

$$S=J_1(\eta_\alpha/n)-\frac{J_1(\eta_\alpha)}{Y_1(\eta_\alpha)}Y_1(\eta_\alpha/n) \quad (18)$$

$$M=\frac{c\frac{1}{n}}{1+\frac{c}{2}(1-\frac{1}{n^2})} \quad (19)$$

$$\langle u_\alpha,u_\alpha\rangle=\frac{1}{\pi^2\eta_\alpha^2}\left\{\frac{1}{Y_1^2(\eta_\alpha)}-\frac{1}{Y_0^2(\eta_\alpha/n)}\right\} \quad (20)$$

$$\langle u_\alpha,1\rangle=-\frac{1}{2n\eta_\alpha}\left\{J_1(\eta_\alpha/n)-\frac{J_1(\eta_\alpha)}{Y_1(\eta_\alpha)}Y_1(\eta_\alpha/n)\right\} \quad (21)$$

参考文献

1) 田村　武：第17回土質工学研究発表会，1982.
2) 田村　武：土木学会論文報告集，No 293，pp 79－89，1980.