

段波の伝播特性に関する数値シミュレーションについて (1)

京都大学工学部 正員 岩佐義朗 京都大学工学部 正員 多田彰秀
大 阪 市 正員 O植村典央 山 口 県 正員 古野 智

1. はじめに：時間的な変化が緩やかな非定常流については、従来より数多くの研究があり、その解析には、最近では電子計算機による数値解析法が適用されている。一方、段波のような変化の急な非定常流についての解析は、きわめて単純化されたもとの手計算的な方法が主で、境界条件などが複雑な場合の計算機による機械的な数値シミュレーションは数が少ない。本研究は、段波の波先の挙動およびその伝播特性を電子計算機による機械計算によってシミュレーションする方法の開発を目的としたもので、その第一段階として、運動量解析法を適用した特性曲線網法を用いて、一様な長方形断面水路内に発生する段波の数値シミュレーションについて考察したものである。

2. 基礎式の特性曲線表示：運動量解析法に基づく基礎式は、次式によって構成される。¹⁾

$$\text{連続式； } \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1) \quad \text{運動量式； } \frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{X \cos \theta}{A} \frac{\partial}{\partial x} (h_g A) = S_0 - S_f \quad (2)$$

上式を特性曲線表示に改めると、

$$\text{特性曲線； } \frac{dV}{dA} = \pm C \quad (3) \quad \text{に沿って特性方程式； } gA(S_0 - S_f) dt + \frac{\partial V^2 - \frac{X \cos \theta}{g} \frac{dA}{dA}}{\partial V \pm C} dA - dQ \quad (4)$$

が成立する。(複号同順) ここで、 $C = \sqrt{B(\beta-1)V^2 + \frac{X \cos \theta}{B}}$ 、 B ；水面幅である。

3. 特性曲線の差分化：(3)、(4)式を台形公式を用いて積分して、差分化を行うと次式が得られる(ただし、ここでは、解の精度を高めるために implicit法を用いている。また、図-1に示すように $x-t$ 平面上で正の特性曲線を α 、負の特性曲線を β とする。)

(i) α について

$$E(x_P, t_P, Q_P, A_P) = x_P - x_L - (\beta V_P + C_P + \beta V_L + C_L) \frac{t_P - t_L}{2} = 0 \quad (5)$$

$$F(x_P, t_P, Q_P, A_P) = [A_P(S_{0P} - S_{fP}) + A_L(S_{0L} - S_{fL})] \cdot g \cdot \frac{t_P - t_L}{2} - (Q_P - Q_L) + \left[\frac{\beta V_P^2 - \frac{X \cos \theta}{B_P} A_P}{\beta V_P + C_P} + \frac{\beta V_L^2 - \frac{X \cos \theta}{B_L} A_L}{\beta V_L + C_L} \right] \frac{A_P - A_L}{2} = 0 \quad (6)$$

(ii) β について

$$G(x_P, t_P, Q_P, A_P) = x_P - x_R - (\beta V_P - C_P + \beta V_R - C_R) \frac{t_P - t_R}{2} = 0 \quad (7)$$

$$H(x_P, t_P, Q_P, A_P) = [A_P(S_{0P} - S_{fP}) + A_R(S_{0R} - S_{fR})] \cdot g \cdot \frac{t_P - t_R}{2} - (Q_P - Q_R) + \left[\frac{\beta V_P^2 - \frac{X \cos \theta}{B_P} A_P}{\beta V_P - C_P} + \frac{\beta V_R^2 - \frac{X \cos \theta}{B_R} A_R}{\beta V_R - C_R} \right] \frac{A_P - A_R}{2} = 0 \quad (8)$$

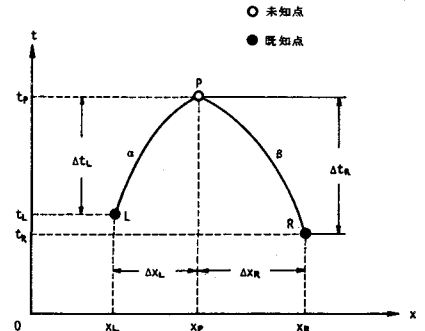


図-1 $x-t$ 平面内の特性曲線

なお、上式の添字 L および R は

図-1 の既知点 L および R での水理量を、添字 P は、未知点 P での水理量を示している。

4. 計算方法：中間点(図-1 参照)では、未知量が、4 個であり、(5)~(8)式より求められる。しかし、これらの式を解析的に解くことは不可能なので、Newton-Raphson法を適用し収束計算により求めている。境界点では、未知量が 3 個となり、成立する式は (5)、(6) 式あるいは (7)、(8) 式の 2 つとなる。従って、未知量のうちいずれか一つを境界条件として与えて、

中間点と同様な収束計算を行っている。

5. 計算結果とその検討：計算に用いた諸元は次のとおりである。①全長50m、幅5mの長方形断面の一樣水路を想定した。②初期条件；水深 $h_0=0.5\text{m}$ 、流速 $u_0=0.7\text{m/s}$ を与えた。

③境界条件；(i)上流端・図-2の水位ハイドログラフを与えた。(ii)下流端・初期での水深が一定に保たれるとした。さて、図-3は、底勾配および摩擦抵抗がないとして求められた特性曲線図である。図中央の太線が段波の波先の軌跡を表わしている。ここでは、同じ族の特性曲線の最初の交点から、質量保存則(Rankine-Hugoniotの条件)より得られる段波の速度 W をexplicitに求め、次の同じ族の特性曲線との交点までは W が近似的に一定とみなして波先の追跡を行っている。図より W は、下流へ伝播する程大きくなっていることが

確かめられる。図-4は、上の場合の水面形状であり、時間の経過と共に波先の急峻化が確認される。図-5は、上流端で与えられた水位ハイドログラフの変形を示したものであり、従来から指摘されている

特性が認められる。なお、ここで内挿計算としては、一次内挿を用いた。図-6は、摩擦抵抗にManning公式を採用し粗度係数0.025、底勾配 $1/1000$ として計算を行った場合の図-3と同様の特性曲線図である。摩擦抵抗による段波発生の遅れ、および発達抑制などが認められる。

6. おわりに：ここでの計算法では同じ族の特性曲線の交差が段波であるという水理学的な解釈のもとに計算法を開発した。その結果より、ここでの数値シミュレーション法によって段波の波先の挙動ならびに伝播特性の再現が、ある程度可能となったと言える。しかし、段波の波先での運動量保存則を用いていないこと、段波の軌跡を横切る際の特性曲線の取扱ひ方、内挿計算方法など、多くの問題点が残されている。これらの点の改良が、今後必要である。

《参考文献》 1) 石原藤次郎編；水工水理学，丸善，1972

2) 岩佐義朗，井上和也，片山 勉；開水路非定常流の数値計算法について，京都市防災研究所年報，19-B-2，1976

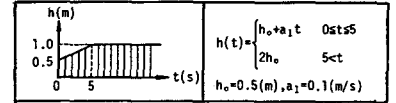


図-2 上流端水位ハイドログラフ

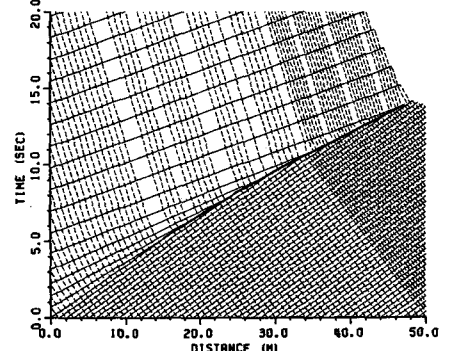


図-3 特性曲線図

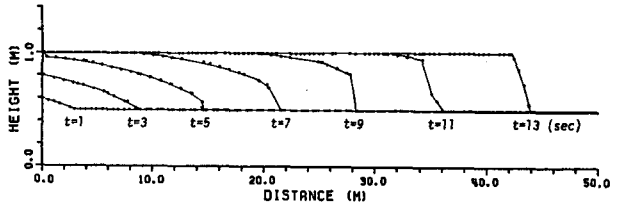


図-4 水面形

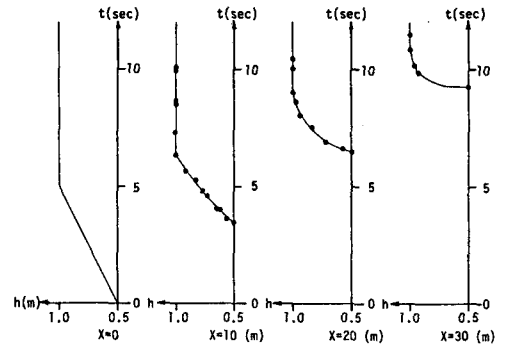


図-5 水位ハイドログラフ

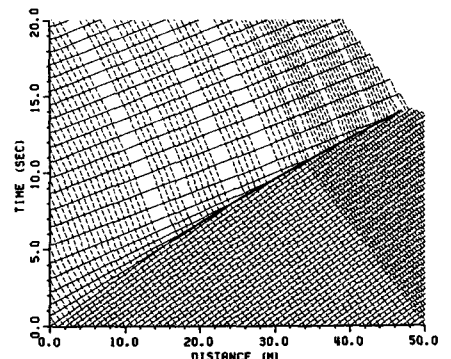


図-6 特性曲線図