

密度が一様でない鉛直二次元流れの数値解析

京都大学工学部 正員 岩佐 義朗

京都大学工学部 正員 井上 和也

水資源開発公団 正員 田中 靖

京都大学大学院 学生員 青木 学

1. まえがき

本報は、感潮河川における塩分の混合形態の変遷の過程を追跡しうる数値解析モデルの構成を目的としたもので、その第一歩として横断方向の一様性を仮定した鉛直二次元モデルによって仮想河口部を対象として数値シミュレーションを実施し、モデルの妥当性を検討しようとするものである。

2. 基礎方程式

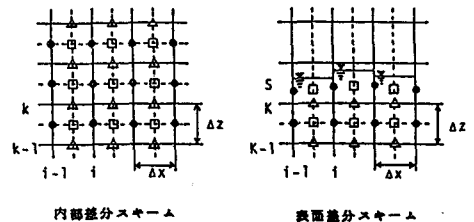
鉛直二次元モデルでの流れおよび物質拡散の数学モデルは、流れの鉛直方向の加速度が重力のそれに比して小さいとすれば次式のように構成される。

$$\text{運動方程式} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uu}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \quad (1)$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2)$$

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\text{拡散方程式} \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial uc}{\partial x} + \frac{\partial wc}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (4)$$



● U 計算位置
△ W 計算位置
□ 濃度計算位置

図-1 差分スキーム

3. 離散式

(1)~(4)式をControl Volumeについて積分し、つぎのような離散式に変形する。

$$\text{運動方程式 表面} \quad \frac{\bar{u}_{i,s}^{n+1} - \bar{u}_{i,s}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{\bar{u}_{i+1/2,s}^{n+1} - \bar{u}_{i+1/2,s}^n}{\Delta t} + \frac{\bar{u}_{i-1/2,s}^{n+1} - \bar{u}_{i-1/2,s}^n}{\Delta t} \right\} + \frac{1}{\Delta x} \left\{ \bar{u}_{i+1/2,s}^{n+1} \bar{u}_{i+1/2,s}^n - \bar{u}_{i-1/2,s}^{n+1} \bar{u}_{i-1/2,s}^n \right\} - W_{i,K} \bar{u}_{i,K}^{n+1} + \frac{1}{\Delta x} \left\{ \bar{u}_{i+1/2,s}^{n+1} \bar{P}_{i+1/2,s}^{n+1} - \bar{u}_{i-1/2,s}^{n+1} \bar{P}_{i-1/2,s}^{n+1} \right\} + \frac{1}{\bar{P}_{i,s}^{n+1}} \bar{C}_{i,K}^{n+1} = 0 \quad (5)$$

$$\bar{P}_{i+1/2,s}^{n+1} = \frac{1}{2} \bar{P}_{i+1/2,s}^{n+1} \{ H_{i+1/2,s} - \Delta z (K-b) \} \quad (6)$$

$$\text{内部} \quad \frac{\bar{u}_{i,k}^{n+1} - \bar{u}_{i,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left\{ \bar{u}_{i+1/2,k}^{n+1} \bar{u}_{i+1/2,k}^n - \bar{u}_{i-1/2,k}^{n+1} \bar{u}_{i-1/2,k}^n \right\} + \frac{1}{\Delta z} \left\{ W_{i,k+1} \bar{u}_{i,k+1}^{n+1} - W_{i,k} \bar{u}_{i,k}^{n+1} \right\} + \frac{1}{\Delta x} \left\{ \bar{P}_{i+1/2,k}^{n+1} - \bar{P}_{i-1/2,k}^{n+1} \right\} - \frac{1}{\Delta z} \left\{ \bar{C}_{i,k+1}^{n+1} - \bar{C}_{i,k}^{n+1} \right\} = 0 \quad (7)$$

$$\bar{P}_{i+1/2,k}^{n+1} = g \left\{ \frac{K}{\Delta z} \bar{P}_{i+1/2,k}^{n+1} - \frac{1}{2} \Delta z \bar{P}_{i+1/2,k}^{n+1} \right\} + 2 \bar{P}_{i+1/2,s}^{n+1} \quad (8)$$

$$\text{連続式 表面} \quad \frac{\bar{u}_{i+1/2,s}^{n+1} - \bar{u}_{i+1/2,s}^n}{\Delta t} + \frac{M_{i+1/2,s}^{n+1} - M_{i+1/2,s}^n}{\Delta z} = 0 \quad (9)$$

$$\text{内部} \quad \frac{\bar{u}_{i,k}^{n+1} - \bar{u}_{i,k}^n}{\Delta x} + \frac{W_{i,k+1} \bar{u}_{i,k+1}^{n+1} - W_{i,k} \bar{u}_{i,k}^{n+1}}{\Delta z} = 0 \quad (10)$$

$$\text{拡散方程式 表面} \quad \frac{\bar{c}_{i,s}^{n+1} - \bar{c}_{i,s}^n}{\Delta t} + \frac{\bar{c}_{i+1/2,s}^{n+1} - \bar{c}_{i+1/2,s}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left\{ \bar{c}_{i+1/2,s}^{n+1} \bar{u}_{i+1/2,s}^{n+1} - \bar{c}_{i-1/2,s}^{n+1} \bar{u}_{i-1/2,s}^{n+1} \right\} - W_{i+1/2,K} \bar{c}_{i+1/2,K}^{n+1} - \frac{1}{\Delta x} \left\{ \bar{c}_{i+1/2,s}^{n+1} \bar{u}_{i+1/2,s}^{n+1} - \bar{c}_{i-1/2,s}^{n+1} \bar{u}_{i-1/2,s}^{n+1} \right\} + \frac{1}{\Delta x} \left\{ \bar{c}_{i+1/2,s}^{n+1} \bar{u}_{i+1/2,s}^{n+1} - \bar{c}_{i-1/2,s}^{n+1} \bar{u}_{i-1/2,s}^{n+1} \right\} = 0 \quad (11)$$

$$\text{内部} \quad \frac{\bar{c}_{i,k}^{n+1} - \bar{c}_{i,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left\{ \bar{u}_{i+1/2,k}^{n+1} \bar{c}_{i+1/2,k}^{n+1} - \bar{u}_{i-1/2,k}^{n+1} \bar{c}_{i-1/2,k}^{n+1} \right\} + \frac{1}{\Delta z} \left\{ W_{i,k+1} \bar{c}_{i,k+1}^{n+1} - W_{i,k} \bar{c}_{i,k}^{n+1} \right\} - \frac{1}{(\Delta x)^2} \left\{ \bar{c}_{i+1/2,k}^{n+1} - 2 \bar{c}_{i,k}^{n+1} + \bar{c}_{i-1/2,k}^{n+1} \right\} - \frac{1}{(\Delta z)^2} \left\{ \bar{c}_{i,k+1}^{n+1} - 2 \bar{c}_{i,k}^{n+1} + \bar{c}_{i,k-1}^{n+1} \right\} = 0 \quad (12)$$

ここに、 $M_{i+1/2,s}^{n+1} = \sum_{j=1}^N u_{i+1/2,s}^{n+1} ds$ であり、また $\bar{u}$ および $\bar{c}$ の添字に現われているa,b,c,およびdは隣接点の流速の正負により、たとえば(5)式のaはつぎのようにとられる。

$$\begin{cases} \bar{u}_{i+1/2,s}^{n+1} = \frac{1}{2} \{ \bar{u}_{i,s}^{n+1} + \bar{u}_{i+1,s}^{n+1} \} \geq 0 \text{ のとき} & a=0 \\ \bar{u}_{i+1/2,s}^{n+1} = \frac{1}{2} \{ \bar{u}_{i,s}^{n+1} + \bar{u}_{i+1,s}^{n+1} \} < 0 \text{ のとき} & a=1 \end{cases}$$

4. 拡散係数について

中立状態の鉛直方向の拡散係数を $K_{v0}=50\text{ cm}^2/\text{s}$ ²⁾とし、成層が発達しているときの鉛直方向のそれには $K_v=K_{v0}e^{-30R_i}$ ³⁾を適用した。ここに、 R_i 数はOverall Richardson数を用いた。縦断方向の拡散係数は成層の有無にかかわらず $10^9\text{ cm}^2/\text{s}$ とした。

5. 塩分濃度と密度の関係

海水密度は一般に塩分と水温との関数とされているが、本研究では水温を 20°C としたときのEckartの式を適用した。すなわち $\rho = (6500.0 + 3.0S) / \{ (1974.7 - 4.0S) + 0.6780(6500.0 + 3.0S) \}$ (13)

ここに、 ρ : 密度 (g/cm^3), S : 塩分 (g/kg) である。

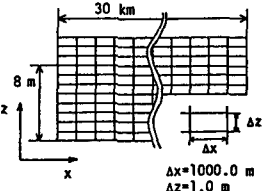


図-2 格子分割図

6. せん断応力項の評価

$\tau = \rho k z^2 \left(\frac{\Delta u}{\Delta z} \right)^2$ と表す。(k: Kármán定数)

ここで、 Δz を計算格子高さとし、 z に水深方向の平均値 $z = H_i/2$ (H_i : 水深)をとって

$$\frac{\tau_{ijk}}{\rho_{ijk}} = f_i (\bar{u}_{i, k+1/2} - \bar{u}_{i, k-1/2})^2 \quad (14)$$

とした。ただし、 $f_i = 0.04 \left(\frac{H_i}{\Delta z} \right)^2$ ($k=0.4$ としている)である。

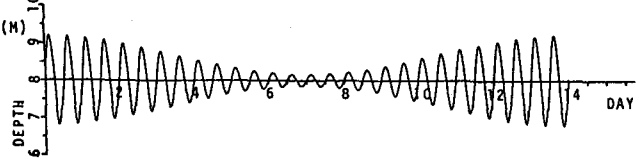


図-3 水位-時間曲線

7. 計算対象領域と境界条件

計算対象領域としては仮想河口部を考えて、これを図-2に示すような格子に分割した。上流端からの河川流量を $0.5\text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ とし、下流端の水位は潮位変化を想定して図-3のように与えた。また下流端の塩分濃度は水深方向に一定としNaCl濃度で20%与えた。

8. 計算結果

図-4は数値シミュレーションの結果を示したものであり、強混合型→緩混合型→弱混合型→緩混合型→強混合型という混合形態の変遷が再現されているものとみられる。

以上の経過から明らかのように、本研究では河口での塩分混入がつねに同じ形態をとるのではなく、潮位変化(月齢)によって変遷することに強調が置かれている。しかし現実の河口では3つの混合型がつねに現われるとは限らず、地形、流量、取排水の方法などによって混合型は複雑に変化すると考えられる。本モデルで基本的な解析は可能になったと判断されるので、今後は現地への適用を図りたい。

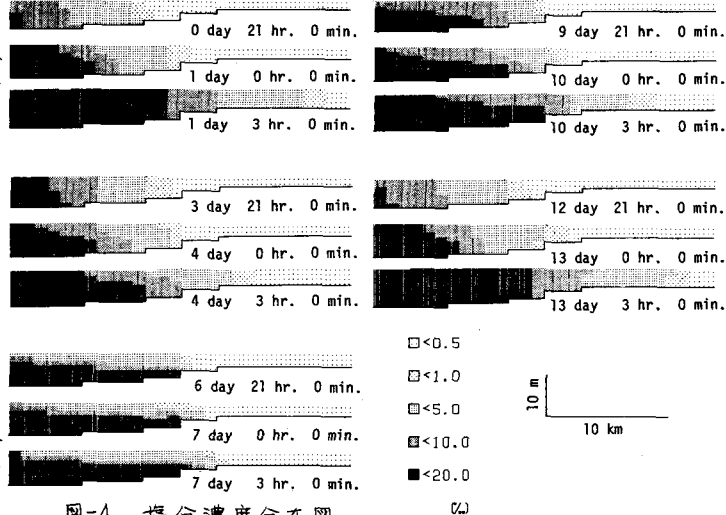


図-4 塩分濃度分布図

〈参考文献〉1) 田中君佐・井上:土木学会第36回年講, II-158, 1981. 2) 堀江毅:“沿岸海域の水の流れと物質の拡散に関する水理学的研究”, 京都大学博士論文, 1981. 3) “Momentum and Mass transfer in Stratified Flow”, Delft Hydraulics Lab., Report R880, Dec., 1974.