

遷移層を持つ成層密度流の安定問題の中立条件について

神戸大学工学部○学生員 平井 卓
神戸大学工学部 正 員 寛 源亮

1. まえがき 成層密度流の安定・不安定には、流速分布が一つの影響要因となると考えられる。本研究では遷移層を有する三層流を考え、密度分布が各層で一様であり境界面で不連続なものについて流速分布を変化させて中立条件への影響を考察する。

2. 基礎式 対象とする流体は非圧縮、非粘性の仮定の下に取扱い、線形近似、ブーシネスク近似が成立すると考える。運動は二次元のものとし、流れ方向にx軸の正、鉛直上方にy軸の正をとる。流速ベクトルは平均量、変動量をbarの有無で表わして $u=(\bar{u}+u, \bar{v})$ と表わされる。ここで $v=\hat{v}(y)\exp[ik(x-\bar{c}t)]$ と表わされると仮定すると運動方程式、連続の式などから $\hat{v}$ に関する次の線形微分方程式を得る。

$$(\bar{u}-\bar{c}) \cdot \bar{p} \{ (\bar{u}-\bar{c}) (\hat{v}^2 - \alpha^2 \hat{v}) - \bar{u} \hat{v} \} = g \bar{p} \hat{v} \quad (1)$$

ただし、 $\bar{p}$: 密度の平均量、 α : 波数、 $\bar{c}=\bar{c}+i\bar{c}'$: 複素流速 であり Prime は $\partial/\partial t$ である。

流れの場の代表的尺度として長さ L 、速度 U_0 、密度 ρ_0 を用い無次元化を行い、 $\bar{u}, \bar{c}, \bar{p}, \hat{v}$ をあらためて $U, C, S, \phi, \alpha, X, Y$ とし、 $K=\alpha L/\bar{c}_0$ を用いると(1)式は次の様になる。

$$(U-C) \cdot S \{ (U-C) (\phi^2 - \alpha^2 \phi) - U \phi \} = g S \phi \quad (2)$$

内部境界面での境界条件は、 $\hat{v}$ の連続と $D\hat{v}/Dt$ の連続から(3)、(4)式の様になる。

$$\phi_0 = \phi_2 \quad (3) \quad S_0 \{ [(C-U_0) \phi_0' + \{ U_0 (C-U_0) - K \} \phi_0] = S_2 \{ [(C-U_0) \phi_2' + \{ U_0 (C-U_0) - K \} \phi_2] \quad (4)$$

(ただし U, C は境界面上、下を示す)

3. 遷移層の流速分布と中立曲線 図-1に示すモデルを解析する。遷移層での流速は $Y \neq 0$ で $\bar{u} = U_{10} \sin(\pi Y / 2h_0) / \sin(\pi/2)$, $Y=0$ で $\bar{u} = U_0/2/h_0$ で Y によって曲率が変化する。 $L=h_0$, $U_0=U_0$, $\rho_0=\rho_1$ として無次元化を行い、 $C=0$ に対する(2)式の解を求めると $\phi(\pm\infty)=0$ を考慮して次の様に求まる。

$$\phi_1 = A e^{-\alpha Y}, \quad \phi_2 = B e^{-\beta Y} + C e^{\beta Y}, \quad \phi_3 = D e^{\alpha Y} \quad (5)$$

ただし添字1, 2, 3は上層遷移層, 下層を示し $\beta = (\alpha^2 - \frac{1}{4} r^2)^{1/2}$ である。

境界条件(3),(4)を考慮すれば(5)式より次式を得る。

$$B \theta_{11} + C \theta_{12} = 0, \quad B \theta_{21} + C \theta_{22} = 0 \quad (6)$$

ただし $\theta_{11} = \{ [-\beta + \alpha(1-\varepsilon)](C-1)^2 + P(C-1) - \varepsilon K \} e^{-\beta}$, $\theta_{21} = \{ [-\beta + \alpha(1-\varepsilon)](C-1)^2 + P(C-1) - \varepsilon K \} e^{\beta}$
 $\theta_{22} = \{ [-\beta - \alpha(1+\varepsilon)](C+1)^2 + P(C+1) + \varepsilon K \} e^{\beta}$, $\theta_{22} = \{ [\beta - \alpha(1+\varepsilon)](C+1)^2 + P(C+1) + \varepsilon K \} e^{-\beta}$ である。

Takashi HIRAI, Motoaki YANO

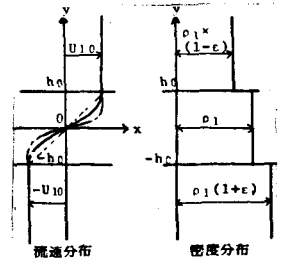


図-1 モデル

(6)の2式の B/C が等しいことより固有値方程式 $\theta_{11}\theta_{22}-\theta_{12}\theta_{21}=0$ を得るが、リチャードソン数 $Ri=\varepsilon K$ を代入、 ε を消去すると次の様

$$\begin{aligned} & C^* \{ -(\alpha-\beta)^2 e^{2\beta} + (\alpha+\beta)^2 e^{2\alpha} \} + C^2 \{ 2(\alpha-\beta)^2 e^{2\beta} - 2(\alpha+\beta)^2 e^{2\alpha} - 2P(\alpha-\beta)^2 e^{2\beta} \\ & + 2P(\alpha+\beta)^2 e^{2\alpha} + 2Ri(\alpha-\beta)^2 e^{2\beta} - 2Ri(\alpha+\beta)^2 e^{2\alpha} + P^2 e^{2\beta} - P^2 e^{2\alpha} \} \\ & + \{ (\alpha+\beta-P-Ri)e^\beta + (\alpha-\beta-P-Ri)e^\alpha \} \{ (\alpha+\beta-P-Ri)e^\beta - (\alpha-\beta-P-Ri)e^\alpha \} = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

$$(7)式より C=0 の中立曲線が $Ri = \alpha - P + \beta \cdot (e^\beta + e^\alpha) / (e^\beta - e^\alpha) \quad (8)$$$

と得られる。ただし $P = \frac{\pi}{2} r \cot(\frac{\pi}{2} r)$ である。 $r=0, 0.6, 1.0$ に対する(8)で示される中立曲線を図-2に示す。不安定領域は2線で囲まれた領域となる。

4. 現実性の高い流速分布と中立曲線 図-3に示すモデルを解析する。遷移層、下層での流速分布の勾配は P, β とする。 $L=h_0$, $U_0=U_b$, $P_0=P_1$ として無次元化を行い、 h_0 が h と表わされるとすると、 $\phi(\pm h)=0$ を考慮して(2)式の解は次の様に求まる。

$$\phi_1 = A(-e^{\alpha(x-2h)} + e^{\alpha x}), \quad \phi_2 = B e^{\alpha x} + C e^{-\alpha x}, \quad \phi_3 = D(-e^{\alpha(x+2h)} + e^{\alpha x}) \quad (9)$$

(9)式に(3)(4)を適用して次の固有値方程式を得る。

$$\lambda_0 C^4 + \lambda_1 C^3 + \lambda_2 C^2 + \lambda_3 C + \lambda_4 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ただし } \lambda_0 &= 8\alpha^2 \sin(2\alpha h), \quad \lambda_1 = -16(U_{20}+1)\alpha^2 \sinh(2\alpha h) + 4\alpha\beta \cosh(2\alpha h) \\ &+ \cosh(2\alpha), \quad \lambda_2 = 8(U_{20}^2+4U_{20}+1)\alpha^2 \sinh(2\alpha h) + \{4(2+U_{20})\alpha(\beta-P) - 8\alpha R_i \\ &- 4\alpha P(2U_{20}+1)\}, \quad \lambda_3 = -16U_{20}(U_{20}+1)\alpha^2 \sinh(2\alpha h) + \{4(1+U_{20})\alpha(\beta-P) + 8\alpha R_i(1+U_{20}) \\ &+ 4\alpha P(U_{20}^2+2U_{20})\} \cosh(2\alpha h) - \cosh(2\alpha) + \{(1+U_{20})P(\beta-P) + R_i \cdot \beta\} \{4 \sinh(2\alpha) \\ &- \sinh(2\alpha h) - 2 \sinh 2\alpha(2-h)\}, \quad \lambda_4 = 8U_{20}\alpha^2 \sinh(2\alpha h) + \{4U_{20}\alpha(\beta-P) - 4\alpha R_i \\ &\times (U_{20}^2+1) - 4U_{20}^2\alpha P\} \cosh(2\alpha h) - \cosh(2\alpha) + \{P(\beta-P)U_{20} - P R_i - U_{20} R_i(\beta-P) - R_i^2\} \\ &\times \{4 \sinh(2\alpha) - 2 \sinh(2\alpha h) - 2 \sinh 2\alpha(2-h)\} \end{aligned}$$

また U_{20} は U_{20} の無次元量で $U_{20} = -2P$ である。任意の (α, Ri) に対して(10)式が虚根を持つか否かを判別して得られた $h=100, U_{20}=0.5$ に対する中立曲線と $h=\infty$ に対してGoldsteinが求めた中立曲線を図-4に示す。

5. 結論 遷移層の流速分布の曲率を変化させると不安定領域が帯状となる基本的形状は変化しないが、その幅や位置が変化することが図-2によって示される。この原因の一つは流速分布の曲率変化にともなう温度の分布の変化と考えられる。また遷移層の流速分布の曲率が変わっても α, Ri の十分小さい領域では中立曲線は $Ri=\alpha$ である。

図-4における図-3のモデルの $U_{20}=0.5$ とした時の $h=100$ と $h=\infty$ の比較は($0 \leq \alpha \leq 0.8$) ($0 \leq Ri \leq 0.52$)で許される。比較の結果、 $h=\infty$ では2本現われる中立曲線が $h=100$ では1本のみであること、 $h=100$ の方が $h=\infty$ の場合よりあるリチャードソン数に対して小さな波数で不安定となることがわかる。しかし計算の範囲を広げることでもう1本の中立曲線が生まれ不安定領域が帯状となることが予想される。(参考文献略)

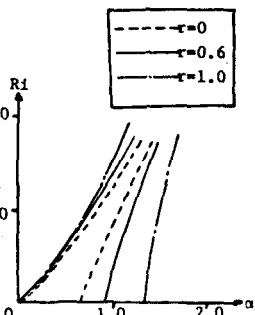


図-2 (8)式の中立曲線

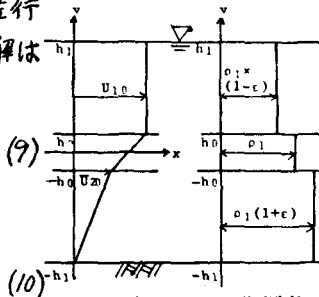


図-3 モデル

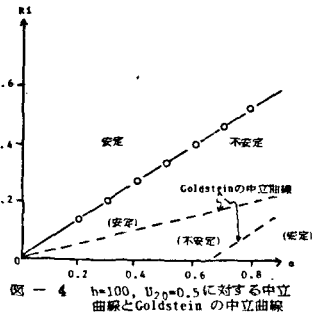


図-4 $h=100, U_{20}=0.5$ に対する中立曲線とGoldsteinの中立曲線