

半無限弾性体内部の点加振問題の解析 (その2)

神戸大学 学○高谷富也 正 北村泰寿 正 桜井春輔

1. まえがき 本文は、半無限弾性体内部に点加振力が作用する場合の変位を求める計算式と数値計算結果を示したものである。前報¹⁾では、多層弾性体の分散関数の定式化に Haskell²⁾ が用いた変位・応力の一般解のベクトル・マトリックス表現を利用した変位解の定式化の方法を示し、上下点加振による上下変位に対する若干の数値計算例を示した。本文では、上下点加振による上下変位および水平変位、また水平点加振による水平変位および上下変位の数値計算を行い、弾性体表面および内部の変位挙動を調べた。

2. 数値計算式 /) 上下点加振による変位式

$$U_r = \frac{Q_0 e^{-i\omega t}}{4\pi\mu r} \left[aI_{uw} + \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} \frac{a^2}{\rho_2(\rho_2+b+c)} - \frac{a^2(b-c)(1+\gamma^2)}{2\rho_2^3} - \frac{3a^2bc(b+c)(1-\gamma^2)}{\rho_2^5} - \frac{a^2(b-c)(1-\gamma^2)}{2\rho_1^3} \right] \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$U_z = -\frac{Q_0 e^{-i\omega t}}{4\pi\mu r} \left[aI_{wz} - \frac{\gamma^4}{1-\gamma^2} \frac{a}{\rho_2} - \frac{a(b+c)^2(1+\gamma^2)}{\rho_2^3} - \left\{ \frac{3(b+c)^2}{\rho_2^3} - 1 \right\} \frac{2abc(1-\gamma^2)}{\rho_2^3} - \frac{a(1+\gamma^2)}{\rho_1} - \frac{a(b-c)^2(1-\gamma^2)}{\rho_1^3} \right] \quad \dots\dots\dots(2)$$

2) 水平点加振による変位式 (U_y は省略)

$$U_x = -\frac{Q_0 e^{-i\omega t}}{8\pi\mu r} \left[aI_{uu}^{(1)} - \frac{1+\gamma^4}{2(1-\gamma^2)} \frac{a}{\rho_2} + \frac{a(b+c)^2(1+\gamma^2)}{2\rho_2^3} - \left\{ \frac{3(b+c)^2}{\rho_2^3} - 1 \right\} \frac{abc(1-\gamma^2)}{\rho_2^3} - \frac{a(1+\gamma^2)}{2\rho_1} + \frac{a(b-c)^2(1-\gamma^2)}{2\rho_1^3} - a \left\{ \frac{e^{-i\rho_1}}{\rho_1} + \frac{e^{-i\rho_2}}{\rho_2} \right\} - \cos 2\theta \left[aI_{uu}^{(2)} - \frac{1+\gamma^4}{2(1-\gamma^2)} \frac{a^3}{\rho_2(\rho_2+b+c)^2} + \frac{a(b+c)(1+\gamma^2)}{2} \left\{ \frac{2}{\rho_2(\rho_2+b+c)} - \frac{b+c}{\rho_2^3} \right\} - \frac{3a^3bc(1-\gamma^2)}{\rho_2^5} - \frac{a^2(1+\gamma^2)}{2\rho_1(\rho_1+(b-c))^2} + \frac{a(b-c)(1-\gamma^2)}{2} \left\{ \frac{2}{\rho_1(\rho_1+(b-c))} + \frac{b-c}{\rho_1^3} \right\} - a \left\{ \frac{e^{-i\rho_1}}{\rho_1} + \frac{e^{-i\rho_2}}{\rho_2} \right\} + 2 \frac{\sin \rho_1 \pm \sin(b-c)}{a} + i \frac{\cos \rho_1 - \cos(b-c)}{a} + 2 \frac{\sin \rho_2 - \sin(b+c)}{a} + i \frac{\cos \rho_2 - \cos(b+c)}{a} \right] \right] \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$U_z = -\frac{Q_0 e^{-i\omega t}}{4\pi\mu r} \cos \theta \left[aI_{wz} + \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} \frac{a^2}{\rho_2(\rho_2+b+c)} + \frac{a^2(b-c)(1+\gamma^2)}{2\rho_2^3} - \frac{3a^2bc(b+c)(1-\gamma^2)}{\rho_2^5} + \frac{a^2(b-c)(1-\gamma^2)}{2\rho_1^3} \right] \quad \dots\dots\dots(4)$$

ただし、

$$a = \frac{\omega r}{V_s}, \quad b = \frac{\omega z}{V_s}, \quad c = \frac{\omega H}{V_s}, \quad \rho_1 = \sqrt{(b-c)^2 + a^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(b+c)^2 + a^2}, \quad \gamma = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)},$$

$$I_{uw} = P \int_0^\infty \left[\frac{\zeta^2 U(\zeta)}{F(\zeta)} - \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} e^{-(b+c)\zeta} + \frac{(b-c)(1-\gamma^2)}{2} \zeta e^{-(b+c)\zeta} + bc(1-\gamma^2) \zeta^2 e^{-(b+c)\zeta} + \frac{(b-c)(1-\gamma^2)}{2} \zeta e^{\pm(b-c)\zeta} \right] J_1(\zeta a) d\zeta - \pi i \left[\frac{\zeta^2 U(\zeta)}{F(\zeta)} J_1(\zeta a) \right]_{\zeta=\zeta_R}$$

$$I_{wz} = P \int_0^\infty \left[\frac{\zeta W(\zeta)}{F(\zeta)} + \frac{\gamma^4}{1-\gamma^2} e^{-(b+c)\zeta} + (b+c)(1+\gamma^2) \zeta e^{-(b+c)\zeta} + bc(1-\gamma^2) \zeta^2 e^{-(b+c)\zeta} + (1+\gamma^2) e^{\pm(b-c)\zeta} + (b-c)(1-\gamma^2) e^{\pm(b-c)\zeta} \right] J_0(\zeta a) d\zeta - \pi i \left[\frac{\zeta W(\zeta)}{F(\zeta)} J_0(\zeta a) \right]_{\zeta=\zeta_R}$$

$$I_{uu}^{(1)} = P \int_0^\infty \left[\frac{\zeta H(\zeta)}{F(\zeta)} + \frac{1+\gamma^4}{2(1-\gamma^2)} e^{-(b+c)\zeta} - \frac{(b+c)(1+\gamma^2)}{2} \zeta e^{-(b+c)\zeta} + bc(1-\gamma^2) \zeta^2 e^{-(b+c)\zeta} + \frac{1+\gamma^2}{2} e^{\pm(b-c)\zeta} \pm \frac{(b-c)(1-\gamma^2)}{2} \zeta e^{\pm(b-c)\zeta} \right] J_0(\zeta a) d\zeta - \pi i \left[\frac{\zeta H(\zeta)}{F(\zeta)} J_0(\zeta a) \right]_{\zeta=\zeta_R}$$

$$I_{uu}^{(2)} = P \int_0^\infty \left[\frac{\zeta H(\zeta)}{F(\zeta)} + \frac{1+\gamma^4}{2(1-\gamma^2)} e^{-(b+c)\zeta} - \frac{(b+c)(1+\gamma^2)}{2} \zeta e^{-(b+c)\zeta} + bc(1-\gamma^2) \zeta^2 e^{-(b+c)\zeta} + \frac{1+\gamma^2}{2} e^{\pm(b-c)\zeta} \right. \\ \left. \pm \frac{(b-c)(1-\gamma^2)}{2} \zeta e^{\pm(b-c)\zeta} \right] J_2(\zeta a) d\zeta - \pi i \left[\frac{\zeta H(\zeta)}{F(\zeta)} J_2(\zeta a) \right]_{\zeta=\zeta_R}$$

$$I_{ww} = P \int_0^\infty \left[\frac{\zeta^2 V(\zeta)}{F(\zeta)} - \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} e^{-(b+c)\zeta} - \frac{(b-c)(1+\gamma^2)}{2} \zeta e^{-(b+c)\zeta} + bc(1-\gamma^2) \zeta^2 e^{-(b+c)\zeta} \right. \\ \left. \mp \frac{(b-c)(1-\gamma^2)}{2} \zeta e^{\pm(b-c)\zeta} \right] J_1(\zeta a) d\zeta - \pi i \left[\frac{\zeta^2 V(\zeta)}{F(\zeta)} J_1(\zeta a) \right]_{\zeta=\zeta_R}$$

また、 μ はせん断弾性係数、 ν はポアソン比、 V_s は横波の伝播速度、 $J_0(\cdot)$ 、 $J_1(\cdot)$ 、 $J_2(\cdot)$ はそれぞれ第0次、1次、2次のBessel関数、 ζ_R はRayleigh極、 $F'(\zeta) = \frac{dF(\zeta)}{d\zeta}$ である。なお、上式中の $F(\zeta)$ 、 $U(\zeta)$ 、 $W(\zeta)$ 、 $H(\zeta)$ 、 $V(\zeta)$ については、紙面の都合上前報の記号を流用した。符号(±, ∓)は加振点より上の部分および下の部分に対応している。

3. 数値計算結果

図-1~4は、加振点から離れるとともにどのような変位挙動を示すかを調べたものである。なお、同図は、図-4中に示すような計算式によって、各変位値を表面の鉛直変位の絶対値を1.0とした相対値で示したものである。また、同図には比較のためにRayleighモードも図示した。これらの図より、表面、内部のいずれの加振においても、無次元水平距離 $a=50$ ($x/L=25/\pi$) 程度でRayleighモードに近い状態になっている。一方、本文では結果を示していないが、式(1)と(4)より動的相反作用の定理が成り立っていることが確かめられた。

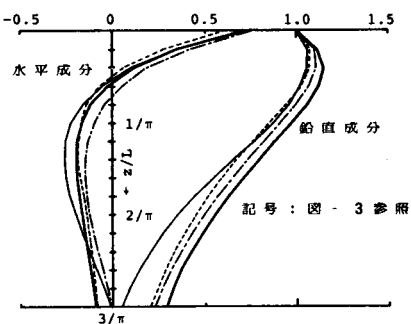


図-2 内部上下点加振 ($a=2.0$)

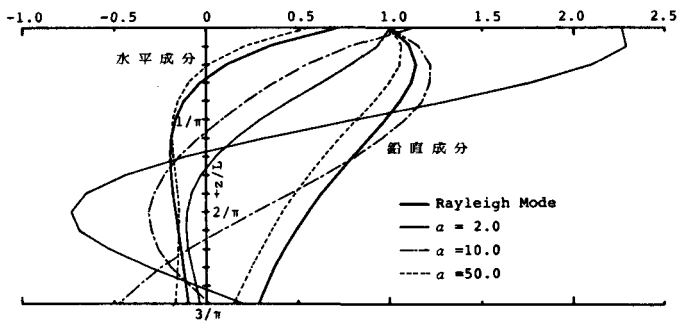


図-3 表面水平点加振 ($a=0.0$, $\theta=0^\circ$)

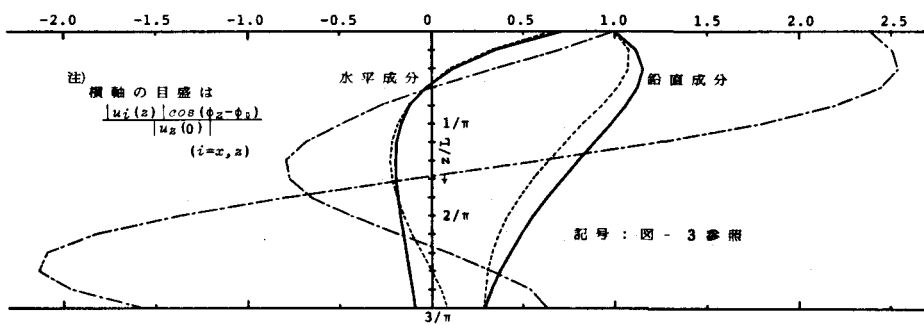


図-4 内部水平点加振 ($a=2.0$, $\theta=0^\circ$)

文献) 1) 高谷, 他: 第36回年講, I-261, 1981. 2) Haskell: Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 43, pp. 17-34, 1953.