構造系の振動解析における数値積分法の誤差評価

京都大学工学部　正員　土岐憲三
京都大学工学部　正員　佐藤忠信
佐藤工業　○正員　日野　徹

1．まえがき

地震時の構造物や地盤の応答を解析する際には，系の挙動を支配する常微分方程式を解くために，時間領域における数値積分を行う必要がある。本研究では，既往の数値積分法の誤差評価を行い，さらに新しい数値積分法を提案して，その有効性を示す。

2．z変換を用いた数値積分法の評価

一般の振動系に現われる運動方程式を状態方程式の形で示せば次式を得る。

$$\dot{X} = AX + f \qquad X(0) = C \tag{1}$$

$$X = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \qquad f = \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix}$$

ここで，y, g, M, K, C はそれぞれ変位ベクトル，外力項ベクトル，質量マトリックス，剛性マトリックス，減衰マトリックスであり，$(\dot{\ }) = \partial/\partial t$ である。外力は線形に変形するという仮定を用いて式(1)を積分し，時刻 $n\tau$ と時刻 $(n+1)\tau$ における状態ベクトル X_n と X_{n+1} の関係を求めると次式のようになる。τ は積分時間間隔である。

$$X_{n+1} = e^{A\tau}X_n + (e^{A\tau} - I)A^{-1}f_{n+1} + [e^{A\tau}\tau - (e^{A\tau} - I)A^{-1}]A^{-1}(f_n - f_{n+1})/\tau \tag{2}$$

式(2)を，一般性を失うことなくスカラー量で表わし，z変換を行えば，次式を得る。

$$H(z) = \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{a_0 + a_1 z}{z - e^{\mu\tau}} \tag{3}$$

ここで，$a_0 = (e^{\mu\tau}\tau - (e^{\mu\tau} - 1)/\mu)/\mu/\tau$，$a_1 = (e^{\mu\tau} - 1)/\mu - (e^{\mu\tau}\tau - (e^{\mu\tau} - 1)/\mu)/\mu/\tau$ であり，μ はAの固有値であって，ω_0, h_0 を系の固有振動数，減衰定数とすれば，$\mu = \sigma + i\omega = -\omega_0 h_0 \pm i\sqrt{1-h_0^2}\,\omega_0$ で求まる。$H(z)$ は $\mu\tau$ をパラメータとするzオペレータからなる伝達関数であり，式(3)の分母（これを状態推移オペレータという）を零とする式より求まるzの値 $z = e^{\mu\tau}$ は微分方程式を差分方程式に変換する写像関数になっている。既往数値積分法は，$e^{A\tau}$ に対して近似を行っており，$e^{A\tau} \simeq E(A\tau)$ なる関係を用いている。これは，固有値空間で見れば $e^{\mu\tau} \cong E(\mu\tau)$ と置いたことに等しい。$z = e^{\mu\tau}$ は厳密解であるから，$z = E(\mu\tau)$ とした場合の，$\mu\tau$ 平面からz平面への写像のゆがみを評価することにより，数値積分法の精度を調べることができる。いま，図-1に $\mu\tau$ 平面からz平面への写像関係を $z = e^{\mu\tau}$ ならびに $z = E(\mu\tau)$ について示した。$|E(\mu\tau)|$，$\angle E(\mu\tau)$ をそれぞれゲイン，位相とし，ゲイン誤差，位相誤差を次式のように定義する。

$$\text{ゲイン誤差 (\%)} = \left|\,|E(\mu\tau)| - e^{\sigma\tau}\right| / e^{\sigma\tau} \times 100 \tag{4}$$

$$\text{位相誤差 (\%)} = \left|\angle E(\mu\tau) - \omega\tau\right| / \omega\tau \times 100 \tag{5}$$

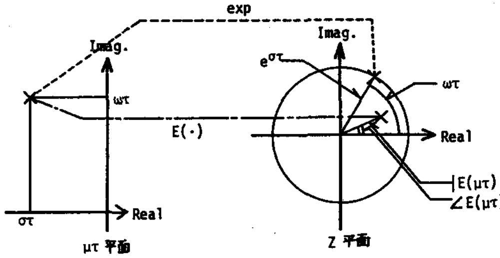

図-1　理論特性根と数値解特性根

Kenzō TOKI　Tadanobu SATŌ　Tōru HINO

$\omega\tau$平面を適当な大きさのメッシュに分割し，その格子点上におけるゲイン誤差，位相誤差を式(4),(5)に従って主な数値積分法の状態推移オペレータに対して求め，各オペレータの誤差1%以内の範囲を示したのが図-2である。最も一般的に用いられているNewmark β法は，比較的広い範囲で高精度を持つが，$\beta=1/6$の時は，非減衰系解析に対し，$\omega\tau \leqq 3.464$の範囲でしか用いることができない。また，Houbolt法，Wilson θ法は，他の手法に比べ，精度はかなり劣っている。

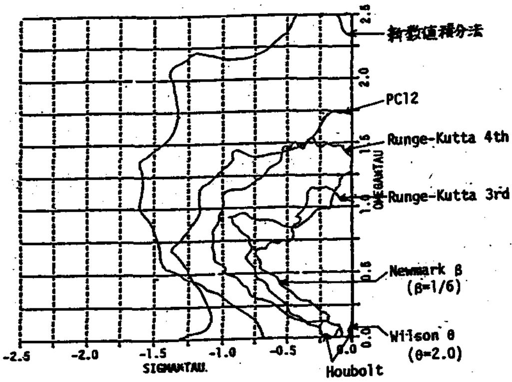

図-2　各数値積分法の誤差1%以内の範囲を示すライン

3．Padé展開式を用いた状態推移オペレータの提案と新数値積分法の差分式

図-2より，Padé同次形近似を用いたPC12法は，Taylor級数展開法に比べ，低次数でよい精度を与えていることがわかる。ここでは，さらに一般化されたPadé近似の概念を，複素数領域に拡大解釈し，$e^{A\tau}$を近似する。提案する状態推移オペレータは，次式で示されるPadé近似式である。

$$e^{A\tau} \cong \frac{I+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\alpha_1-\frac{1}{2}\alpha_2\right)A\tau+\frac{1}{12}(1-\alpha_1-\alpha_2)A^2\tau^2}{I-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2\right)A\tau+\frac{1}{12}(1+\alpha_1+5\alpha_2)A^2\tau^2} \qquad (6)$$

実際の振動解析では，$-0.5\leqq\sigma\tau\leqq0$，$0\leqq\omega\tau\leqq2.5$ 程度であることを考えて，この範囲で高精度の近似となるようにα_1，α_2の値を決定する。図-2に示すように，提案する状態推移オペレータは，他に比べ広範囲でよい精度をもつ。

新数値積分法の差分式は，次の様になる。

$$\ddot{y}_{n+1}=\left(M\frac{\gamma_2}{\tau}+C+K\frac{\tau}{\gamma_2}\right)^{-1}\left(M\frac{\gamma_2}{\tau}\dot{v}_{n+1}-Kv_{n+1}+Mg_{n+1}\right)$$

$$\ddot{y}_{n+1}=\frac{\gamma_2}{\tau}\left(\dot{y}_{n+1}-\dot{v}_{n+1}\right)$$

$$y_{n+1}=v_{n+1}+\frac{\tau}{\gamma_2}\dot{y}_{n+1}$$

ここで，v_{n+1}ならびに$\dot{v}_{n+1}$は$f(M, K, C, g_{n+1}, g_n, \gamma_1, \gamma_2, B_1, B_2)$なる形であり，$\gamma_1$，$\gamma_2$，$B_1$，$B_2$は$\alpha_1$，$\alpha_2$によって求まる定数である。

4．線形一自由度系を用いた数値実験による検討

図-3に，実際の応答計算による加速度波形を示した。入力は単位振幅，周期0.201秒のsin波，系の周期0.2秒，減衰定数0.1，$\tau=0.08$秒の場合である。提案法はPC12法に比べて振幅特性がすぐれていることがわかった。

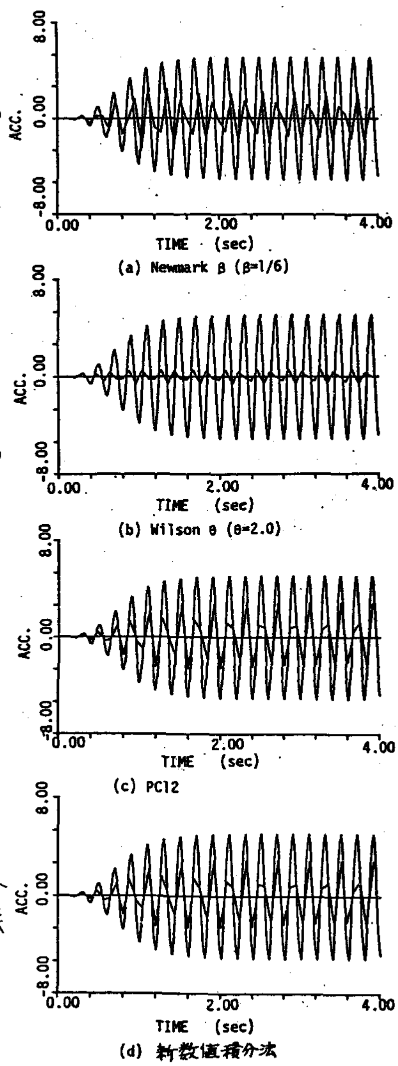

図-3　応答波形

（参考文献）

Arieth Iserles, SIAM J. Numer. Anal. pp.631-636, 1979