

積分方程式法による開孔を有するシェルの解析

京都大学工学部 正員 丹羽義次

京都大学工学部 正員 北原道弘

北 陸 電 力 正員 O宮井和信

1. はじめに

開孔部を有する円筒殻の応力集中問題は、パイプライン、原子炉の付属機器など多くの重要な構造物の設計段階で、また、破壊に対する規準を定める上において、きわめて重要な問題である。座標系に拘束されず、任意形状の開孔についても容易に解析を行なうことが可能な解析手法として、近年、積分方程式法が適用され始めている。^{(1),(2),(3)} 本研究は、円孔または楕円孔を有する円筒殻が、軸引張、ねじり、内圧を受ける場合の開孔部における応力解析を、薄い扁平殻理論に基づき積分方程式法により行なったものである。未知量の近似関数としては周期3次B-スプライン関数を用い、また、積分核の近似補間として有界な積分核に対しては周期3次B-スプライン関数を、さらに特異性を有する積分核に対しては非周期3次B-スプライン関数を用いて、精度の向上および計算時間の短縮をはかった。

2. 積分方程式法による定式化

Fig.1のような直交直線座標系を採用すると、本開孔問題は以下のように表わされる。ただし、開孔前の諸量は右肩に0を付し、開孔後の諸量は何も付さず、さらに開孔前と開孔後の諸量の差は右肩にΔを付して示す。また、Fig.1に示すように開孔の境界をC、内部をD⁻、外部をD⁺とする。(諸量は無次元化を行なっている。)

(支配方程式)

$$\mathbb{L} u(x) = -i \frac{P}{L_R} \quad (x \in D^+) \quad \text{---(1)} \quad \mathbb{L} u^0(x) = 0 \quad (x \in D^+) \quad \text{---(2)}$$

$$\mathbb{L} u^p(x) = -i \frac{P}{L_R} \quad (x \in D^- \cup C \cup D^+) \quad \text{---(3)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \phi - i w, \quad \phi: \text{応力関数}, w: \text{面外変位} \\ \mathbb{L} \equiv \Delta - 8i \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad L_R = \frac{L_0}{8R} \\ P: \text{内圧} \quad (\text{軸引張, ねじりの場合は, } \mathbb{L} u = 0, \mathbb{L} u^0 = 0) \\ R: \text{シェルの代表曲率半径}, L_0: \text{代表長さ} \end{array} \right.$$

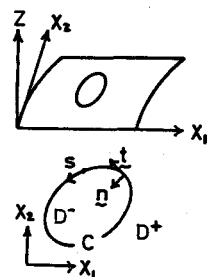


Fig.1, 座標, 領域, 単位はmm

(基本解)

$$\mathbb{L} G(X, Y) = -\delta(X, Y) \quad \text{---(4)} \quad \left\{ X = X(X_1, X_2), Y = Y(Y_1, Y_2), \delta(X, Y): \text{Diracのデルタ関数} \right\}$$

の解である基本解 $G(X, Y)$ は、次のようになる。

$$G(X, Y) = \lambda \int_0^{\pi} \sinh(kz) \cdot K_0(k\rho) dz + \lambda k k_1 \int_0^{\pi} K_0(k|z|) dz + \lambda |k| \cdot K_1(k|k|) \quad \text{---(5)}$$

$$\left\{ K_n: n\text{次の変形ベッセル関数}, k = 1 + i, \lambda = (1 - i)/8\pi, k_1 = X_1 - Y_1, \rho = (z^2 + k^2)^{1/2} \right\}$$

(境界条件)

$$(6) \quad N_n = \phi_{,tt} = 0, \quad (7) \quad N_{nt} = -\phi_{,nt} = 0, \quad (8) \quad M_n = -L_R \{ \Delta w - (1 - \nu) w_{,tt} \} = 0,$$

$$(9) \quad V_n = -L_R \{ (\Delta w)_{,n} + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} (w_{,nt}) \} = V^*,$$

ここに、 V^* は内圧の場合に開孔周上で生じる一様なせん断力であり、軸引張、ねじりの場合は、 $V^*=0$ とする。

(無限遠点での条件)

$U^d(x)=0$ ($x \in C_\infty$) --- (10) [C_∞ : 内部に C を含む無限遠での仮想境界] 以上を考慮し、 U^d に対して Green の外部表現、 U^i に対しては内部場 (D^-) の外部表現を用いることにより、荷重として軸引張、ねじり、内圧を受ける開孔問題の解 $U(x)=U^o(x)+U^d(x)$ の積分表示式は、次式となる。

$$U(x)=U^o(x)+\int_{C_0}^x K_2(x,y) \cdot F_2(y) dy + i \left\{ \int_{C_0}^x \left(G \cdot \frac{V_n}{L_R} - G_n \cdot \frac{M_n}{L_R} \right) dy - \int_{C_0}^x G \cdot \frac{P}{L_R} dA \right\} \quad (x \in D^+) \quad (11)$$

$$\{F_1=(\Delta\phi)_n, F_2=\Delta\phi, F_3=-u_n, F_4=-\frac{\partial u}{\partial x}, K_2(x,y); \text{積分核(省略)}\}$$

また、無次元化された膜応力および曲げ応力は、 F_2, F_3, F_4 により

$$\sigma_m/\sigma = F_2, \quad \sigma_b/\sigma = (3(1-\nu^2))^{1/4} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - K_4 F_3 \right) \quad (12)$$

と表わされる。 [K_4 : 開孔周上の点における開孔の局所的な曲率]

そこで、境界条件 (8), (9) 式を (11) 式に代入し、次のように他の境界条件 (6), (7) 式および未知量 F_2, F_3 を開孔周上で表現することにより、積分方程式系を構成する。

$$(13) \quad 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (Re U), \quad (14) \quad 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (Re U), \quad (15) \quad u_{n,x} = \lim_{x \rightarrow x_0} (Im U), \quad (16) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} (Im U) \right)$$

【ただし、 $\lim = \lim_{(D^+ \ni x \rightarrow x \in C)}$ とする。】

よって、本問題は上述の積分方程式系および多連結領域における適合条件式を満足する F_2 を求めることに帰する。

3. 数値解析例

離散化に際し、未知量および有界な積分核の近似関数として同期3次B-スプライン関数を用いることは、精度の向上および計算時間の短縮に対して有効であることが確かめられた。また、長軸が円筒殻の母線と任意の角度 ϕ をなす楕円孔の応力解析に、本解析法が有効であることがわかった。ここでは一例として、ポアソン比 $\nu=1/3$ 、楕円孔の扁平率 $b/a=0.4$ 、曲率パラメータ $\lambda=\{3(1-\nu^2)/4R^2\}^{1/4} a=2$ (h : シェルの厚さ) としたときの楕円孔周上に生じる全応力 (膜応力+曲げ応力) の最大値 $(\sigma_{tot})_{max}/\sigma$ を、シェルの外表面および内表面について Fig.2~Fig.4 に示した。Fig.2~Fig.4 により、 ϕ の値によって楕円孔の応力集中がどのように変化するかがわかる。詳細については、当日発表する。

参考文献

- (1) Sanders, J.L.Jr, Journal of Applied Mechanics, Vol.42, 1975
- (2) Hansen, E.B, Journal of Elasticity, Vol.7, 1977
- (3) 中村雅彦, 土木学会関西支部年講, I-6, 1981

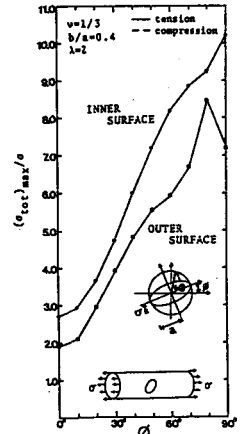


Fig.2 楕円孔周上の最大全応力 (軸引張)

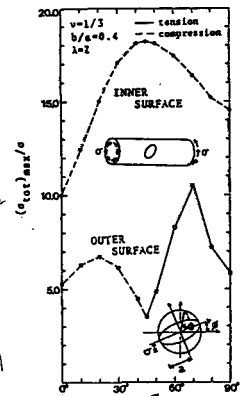


Fig.3 楕円孔周上の最大全応力 (ねじり)

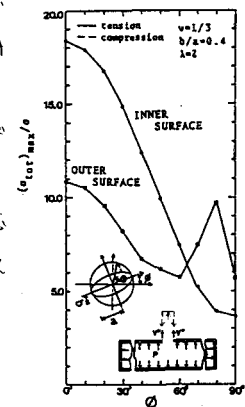


Fig.4 楕円孔周上の最大全応力 (内圧)