

隅角部を含む平板の積分方程式法による解析

福井大学工学部 正 員 福井卓雄
福井大学大学院 学生員 ○ 岩佐晃男

1. はじめに

積分方程式法の利点は、比較的単純な近似を用いても、かなり良好な解を得ることである。しかし、境界が隅角を有する場合には、隅角部において積分方程式の核に特異性が生じるため、隅角点付近で十分な精度の近似解を得られないことがある。したがって、何らかの方法で隅角点付近の解を改善する必要がある。ここでは、積分方程式を用いた長方形板の解析例をあげ、解の精度向上のための考察を行い、実際に行った数値解析結果を示す。

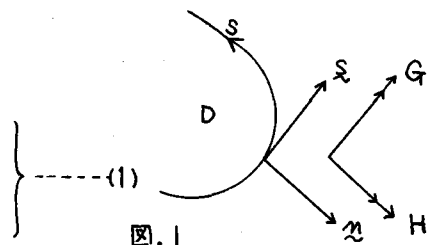
2. 平板問題における積分方程式の定式化

一般に、平板問題における基本式は、

$$\nabla^2 w = P/D$$

$$M_{ij}[w] = -D[(1-\nu)w_{,ij} + \nu\delta_{ij}w_{,kk}]$$

$$Q_i[w] = -Dw_{,ki}$$



である。ここで M はモーメントで、 Q はせん断力である。

境界 D の S 方向の単位法線ベクトルを n ，単位接線ベクトルを s とすると、平板問題における境界条件は、次のように定義される。(図.1)

- | | | |
|-------------|---|-------|
| i) 固定端 : | $w = 0, \quad \partial w / \partial n = 0$ | } (2) |
| ii) 単純支持端 : | $w = 0, \quad G[w] = n_i n_j M_{ij}[w] = 0$ | |
| iii) 自由端 : | $G[w] = 0, \quad n_i Q_i[w] - \partial / \partial s H[w] = 0 \quad (H[w] = -n_i s_j M_{ij}[w])$ | |

ポテンシャルの概念を導入し、一重層密度 σ ， τ を用いてたわみ w は、

$$w(x) = \int_D k(x;y)P(y)dy + \int_{\partial D} \left\{ \Gamma(x;y)\sigma(y) + H(x;y)\tau(y) \right\} ds_y \quad \text{----- (3)}$$

と表わせる。ここで、 k は基本特異解であり、 P は荷重項、 Γ は無限板に単位の集中荷重が作用した時の解であり、 H は無限板に単位の集中モーメントが作用した時の解である。同様な式で、勾配および曲げモーメントについても表わすことができる。あとは、それぞれの境界条件式(2)に応じた連立方程式として、 σ, τ について解けばよいことになる。

3. 隅角付近での実際の解の特性

隅角部における重調和関数の解の特性を知るために、図.2のような、角のあるくさび形領域を考え、J.H. Michellの解を導入し、隅角部での解の特異性を調べてみると、隅角部付近でモーメントが連続であるのは、固定の場合、 $\phi \leq \pi$ のときで、単純支持の場合、 $\phi \leq \pi/2$ ，または $\phi = \pi$ のときである。

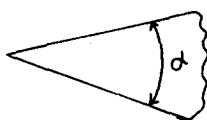


図.2

4. 隅角部での解の精度向上に関する考察

一般に積分方程式により求めた数値解には、隅角部で特異性があることが知られている。このことと、3の結果をふまえて、隅角部での密度の近似方法を考えてみる。方針としては、積分方程式の解が、隅角部で実際の解の性質と似た性質をもつようにすることである。つまり、隅角点において、実際の解に特異性がある場合には、積分方程式の隅角部での特異性を何らかの方法で回避させる必要がある。ここでは、隅角部での密度分布を領域外に少し延長させて、隅角点での特異性を生じないようにする。この場合、各隅角点ごとに未知数が増加するから、新しい条件をつけ加える必要がある。一例として、単純支持端の場合、隅角部において、たねみの接線方向の勾配の平均値が、0となるような条件を与えた。すなわち、

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^+}{\partial s} + \frac{\partial w^-}{\partial s} \right) = 0 \quad \text{----- (4)}$$

を与えた。(図.3)

5. 解析例と考察

解析例では、密度を境界上で区間一定として近似した。
荷重条件は、等分布荷重、境界条件は、全辺単純支持端とする。

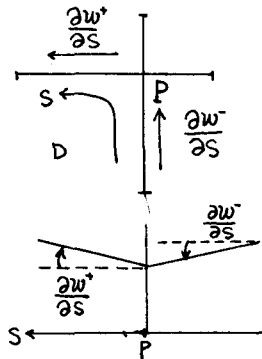


図.3

表.1からわかるように、何も手を加えない場合(Original)と比べ、4.で述べた方法の場合(Modified)、明らかに、解の精度が向上していることがわかる。したがって、隅角部において、特異性が生じる場合、4の方法を用いる際に、各境界条件に応じて、隅角部での付加条件を与えることで解の精度向上をなしえることができそうである。

表.1 Bending moments of a uniformly loaded rectangular plate with simply supported edges.
 M_{xx}, M_{yy} ($\times 10^{-3} \text{ pa}^2$) $\nu=0.3$ I.E.=56 Exact Original Modified

x/a	0.20	0.26	0.32	0.38	0.44	0.50
M_{xx}						
1.00		0.0	0.174		0.0	-3.561
			-0.144			-0.767
0.88	2.311	2.314	2.080	1.768	1.711	1.352
		2.308	2.121		1.030	1.030
0.76			2.109	1.839	1.386	0.790
			3.675			0.403
0.64			3.748			0.775
			4.992			1.233
0.52			4.946			1.358
			5.006			1.644
0.40			5.938	4.884	4.853	3.562
			5.947		4.892	3.537
			6.601			1.945
			6.632			2.136
						2.136
M_{yy}						
1.00		0.0	0.453		0.0	0.135
			0.045			0.320
0.88	1.970	1.894	1.744	1.447	1.225	1.066
		1.999	1.600		1.466	1.105
0.76			1.776			0.587
			2.586			0.831
0.64			2.664			0.930
			3.063			0.819
0.52			3.093			0.942
			3.270	2.642	2.637	1.880
			3.283		2.646	1.878
0.40			3.344			1.885
			3.347			1.014
						1.002

