一つの積分方程式法のプログラムにより平面弾性問題と平板問題とを同時に処理する方法について

福井大学工学部　正員　福井卓雄

平面弾性問題と平板問題との間には相似の関係があり，これらは本質的には同一の問題とみなせる。一方，積分方程式法の解析プログラムは，解くべき積分方程式の核に依存する部分以外は，ほとんど同一のプログラムで処理することができる。本報告では，平面弾性問題の解析にも，平板問題の解析にも使えるプログラムについて述べる。このようなプログラムは，特に，薄肉構造物などの面内力と面外力とを受ける平板で構成される構造物の解析に有効であろう。

<u>平面弾性問題と平板問題の相似性</u>

図のように，6種類の量 $u_\alpha, \chi, E_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta}, f_\alpha, \eta$ とそれらの関係を考える。(Fig.1)　ただし，$E_{\alpha\beta}$ と $S_{\alpha\beta}$ は対称なテンソルである。この図で，

u_α：変位，$E_{\alpha\beta}$：ひずみ，$S_{\alpha\beta}$：応力，f_α：物体力

とすると，図の上半分は平面弾性問題の基礎式を表わしている。このとき，$\eta=0$ であり，また，$f_\alpha=0$ であれば，Airy の応力関数 χ が定義できる。λ と μ は平面ひずみの場合には Lamé 定数であるが，平面応力の場合には，$\lambda=\frac{E\nu}{1-\nu^2}$ (E: Young率，ν: Poisson比）とする。境界条件は

（変位）　$u_\alpha=\hat{u}_\alpha$　，（応力）　$n_\beta S_{\alpha\beta}=\hat{t}_\alpha$

（混合）　$n_\alpha u_\alpha=\hat{u}_n$ ，$s_\alpha n_\beta S_{\alpha\beta}=\hat{t}_s$

である。ここに，t_α は境界応力であり，n_α, s_α は単位法線，接線ベクトル，添字 n，s は法線，接線成分を表わす。

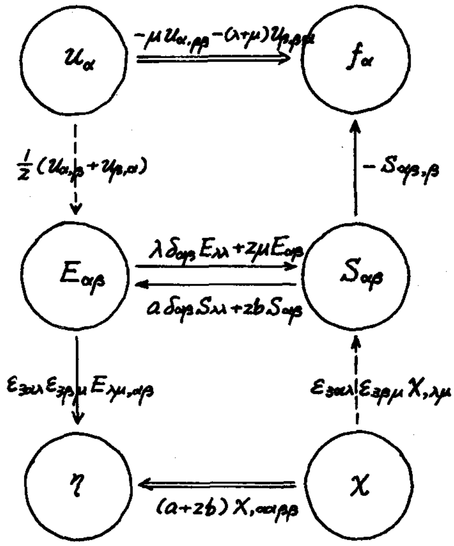

Fig. 1　　$a=-\frac{\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)}$ ，$b=\frac{1}{4\mu}$

次に，同じ図で以下のように量の読みかえをする。

χ：たわみ，　$S_{\alpha\beta}$：たわみの曲率，　$E_{\alpha\beta}$：曲げおよびねじりモーメント，　η：横荷重．

このとき，図の下半分は平板問題の基礎式を表わす。$f_\alpha=0$ であり，u_α は平板問題の応力関数である。また，$a=D\nu$ ，$b=\frac{1}{2}D(1-\nu)$ (D：曲げ剛性）である。境界条件は

（固定）　$\chi=0,\ \frac{\partial\chi}{\partial n}=0$ ，　（単純支持）　$\chi=0,\ s_\alpha s_\beta E_{\alpha\beta}=0$，　（自由）　$s_\alpha s_\beta E_{\alpha\beta}=0,\ \ \varepsilon_{3\alpha\lambda}s_\beta E_{\alpha\beta,\lambda}+\frac{\partial(s_\alpha n_\beta E_{\alpha\beta})}{\partial s}=0$

となる。ここに，$\partial/\partial n$，$\partial/\partial s$ は法線，接線方向の微分を表わす。

以上のように，平面弾性問題と平板問題とは本質的に同一の問題であって，ただ境界条件の形が異なるだけである。以下では，Fig.1 の系を平面弾性系と呼ぶ。

<u>平面弾性系の基本解，積分表現</u>

平面弾性系は二種類の基本特異解をもつ。$\delta(x)$ を二次元の Dirac のデルタとすると，

Takuo FUKUI

f_α を $\delta_{\alpha\gamma}\delta(x-y)$ とおいたとき.

$$u_\alpha: \quad G_{\alpha\gamma}(x;y)=\frac{1}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left\{(\lambda+3\mu)\delta_{\alpha\gamma}\log\frac{1}{r}+(\lambda+\mu)r_{,\alpha}r_{,\gamma}\right\} \quad . \quad r=|x-y|$$

$$S_{\alpha\beta}: \quad -\frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)}\frac{1}{r}\left\{\mu(-\delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma}+\delta_{\alpha\gamma}r_{,\beta}+\delta_{\beta\gamma}r_{,\alpha})+2(\lambda+\mu)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}\right\}$$

η を $\delta(x-y)$ とおいたとき.

$$\chi: \quad K(x;y)=\frac{1}{8\pi(a+2b)}r^2(\log r-1)$$

$$E_{\alpha\beta}: \quad -\frac{1}{2\pi(a+2b)}\left\{(a+b)\delta_{\alpha\beta}\left[\log\frac{1}{r}-\frac{b}{2(a+b)}\right]+b\,r_{,\alpha}r_{,\beta}\right\}$$

さらに，平板問題で単位集中モーメントの作用した場合の解に対応するものとして，

$$\chi: \quad H^{(\gamma)}(x;y)=\frac{\partial}{\partial y_\gamma}K(x;y)=\frac{1}{8\pi(a+2b)}r_{,\gamma}r(2\log r-1)$$

$$H^{(\gamma)}_{,\alpha}(x;y)=-\frac{1}{4\pi(a+2b)}\left\{\delta_{\alpha\gamma}\left(\log\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\right)-r_{,\alpha}r_{,\gamma}\right\}$$

$$E_{\alpha\beta}: \quad \frac{1}{2\pi(a+2b)}\frac{1}{r}\left\{(a+b)\delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma}-b(\delta_{\alpha\gamma}r_{,\beta}+\delta_{\beta\gamma}r_{,\alpha})+2b\,r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}\right\}$$

これらが代表的な基本解として考えられる。平面弾性系の解を，たとえば

$$u_\alpha(x)=u_{0\alpha}(x)+\int_{\partial D}G_{\alpha\beta}(x;y)\,\phi_\beta(y)\,ds_y$$

$$\chi(x)=\chi_0(x)+\int_{\partial D}H^{(\beta)}(x;y)\,\phi_\beta(y)\,ds_y$$

という境界積分で表わす。ここに，$u_{0\alpha}$, χ_0 は特解である。さらに，境界条件を

平面弾性問題　(変位) $u_\alpha=\hat{u}_\alpha$　,(応力) $n_\beta S_{\alpha\beta}=\hat{t}_\alpha$,(混合) $n_\alpha u_\alpha=\hat{u}_n$, $s_\alpha n_\beta S_{\alpha\beta}=\hat{t}_s$

平板問題　(固定) $\frac{\partial\chi}{\partial s}=0$, $\frac{\partial\chi}{\partial n}=0$　,(単純支持) $\frac{\partial\chi}{\partial s}=0$, $s_\alpha s_\beta E_{\alpha\beta}=0$

と表わせば，これらの境界値問題はまったく同一の問題になってしまう。また，積分表現の核を他のものでおき換えたり，平板の自由境界条件を扱う場合であっても，得られる積分方程式の核は重調和方程式の基本特異解 $\frac{1}{8\pi}r^2\log r$ の偏導関数の線形結合となっている。

解析プログラム

右図は積分方程式法による解析プログラムの概略である。プログラムとしては適当な影響係数さえ選んでやれば，他の部分はほとんど変らない。影響係数の計算は，積分核，境界条件，積分方程式の近似の方法によって異なるが，通常は積分核に依存するサブルーチン群を準備することによって，プログラムを単純化している。

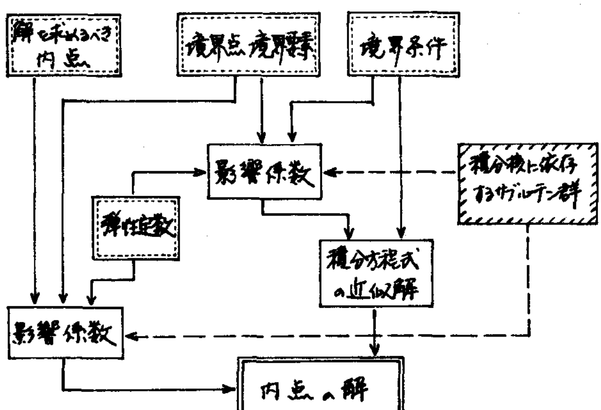

Fig.2

平面弾性系の問題では，積分核は高々4階までの $r^2\log r$ の偏導関数の線形結合で表わすことができるので，これに対応するサブルーチン群を準備しておくことによって，種々の積分核・境界条件の問題に容易に対処できる。