隅角部を含む平面弾性体の積分方程式法による解析

福井大学　大学院　学生員　○登　悦男
福井大学　工学部　正　員　福井　卓雄

1．まえがき

積分方程式法を解析に用いる場合、隅角部において解が十分に近似されずに、解が発散することが、しばしばある。本研究では、静弾性学における2次元の境界値問題について、この特異性の問題をとりあげ、その発生原因を考察する。また、この原因をふまえて、最も単純な発想にもとづく手法である「はみだし法」を適用し、それによる解の精度の向上について、検討する。

2．隅角部近傍の解の特異性

隅角部付近の解には、次のように特異性が発生する。[1)] (Fig.1参)

(1) 境界 $\partial D^+, \partial D^-$ において、双方とも固定、あるいは自由の場合、$\alpha > \pi$ で、特異性が発生する。

(2) 一方が固定、他方が自由の場合、$\alpha \gtrsim 53°$ で、特異性が発生する。

いずれの場合も、特異性は、応力が無限大となる程度のものである。

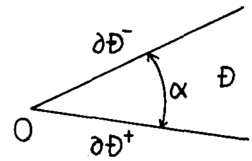

Fig. 1

3．近似解の特異性

領域内の変位 $u_i(x)$ を境界上に分布する密度 $\varphi_i(y)$ による一重層ポテンシャルで表わすと

$$u_i(x) = \int_{\partial D} G_{ij}(x;y)\varphi_j \, dS_y \tag{1}$$

となる。ここで $G_{ij}(x;y)$ は、弾性学の基本特異解であり、次式で表わされる。

$$G_{ij}(x;y) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\delta_{ij}\log\frac{1}{r} + r_{,i} r_{,j}\right] \tag{2}$$

ここに μ はせん断弾性定数，ν はポアソン比，δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

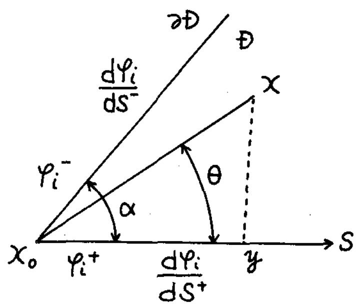

Fig. 2

次に、密度を、隅角付近で Taylor展開して

$$\varphi_i(y) = \varphi_i^{\pm}(x_0) + (S(y) - S(x_0))\frac{d\varphi_i}{dS^{\pm}} + \cdots\cdots \tag{3}$$

とし、それぞれの項に対応する一重層ポテンシャルを

$$u_i(x) = u_i^0(x) + u_i^1(x) + u_i^2(x) + \cdots\cdots \tag{4}$$

とする。(Fig.2参)　今、u_i^n について $i=1$ のときを考える。($i=2$ のときも同様である。) u_i^0, u_i^1 について、隅角部の特異性に関する項について、整理すると、次式のようになる。

Takuo,FUKUI & Etuo,NOBORI

$$u_i^\circ(x) = B\log\rho\left[\sin\theta\,\varphi_2^+ - (3-4\nu)\cos\theta\,\varphi_1^+ - \{(3-4\nu)\cos\alpha\cos(\alpha-\theta) - \sin\alpha\sin(\alpha-\theta)\}\varphi_1^- + \{\cos\alpha\sin(\alpha-\theta) + (3-4\nu)\sin\alpha\cos(\alpha-\theta)\}\varphi_2^-\right] + \mathcal{E}(\rho) \tag{5}$$

$$u_i'(x) = \frac{B}{2}\rho^2\log\rho\left[\sin2\theta\frac{d\varphi_2}{ds^+} - 2(3-4\nu)\cos^2\theta\frac{d\varphi_1}{ds^+} + \{2(3-4\nu)\cos^2(\alpha-\theta)\cos\alpha - \sin2(\alpha-\theta)\sin\alpha\}\frac{d\varphi_1}{ds^-} + \{2(3-4\nu)\cos^2(\alpha-\theta)\sin\alpha - \sin2(\alpha-\theta)\cos\alpha\}\frac{d\varphi_2}{ds^-}\right] + \mathcal{E}(\rho^2) \tag{6}$$

ここに $\mathcal{E}(\rho)$, $\mathcal{E}(\rho^2)$ は、それぞれ ρ, ρ^2 程度の関数である。(5), (6) 式より、特異性は u の勾配が無限大となる程度のものであり、これは隅角部の密度 φ_i の値によって、決まることがわかる。特異性が消えるのは、特別な場合だけである。

4. はみだし法

特異性解消の基本方針は「隅角部において、実際の解に似た性質をもつように、近似解の表現を選ぶこと」である。ここでは「はみだし法」を用いる。[2] その方針は、次のとおりである。

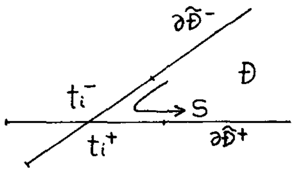

Fig. 3

(1) 実際の解と近似解の双方に特異性が発生するような隅角の場合は、実際の解の特異性を近似解の特異性で近似できると考えて、何も手を加えない。

(2) 実際の解に特異性が発生しない場合は、近似解の特異性を隅角部での密度分布を領域外に少し延長させることによって、回避する。この場合各隅角点ごとに、未知数が増加するから、新しい条件をつけ加えてやる。

5. 解析例と考察

Fig. 4 に第2種境界値問題の解析例を示す。この場合の付加条件は、境界条件を、そのまま はみだした境界要素についても適用してやることで満足する。はみだし法の精度は 実用上十分なものであることがわかる。また、密度の近似を線形、あるいは、2次関数などで近似すると、さらに高い精度の解が得られるであろう。

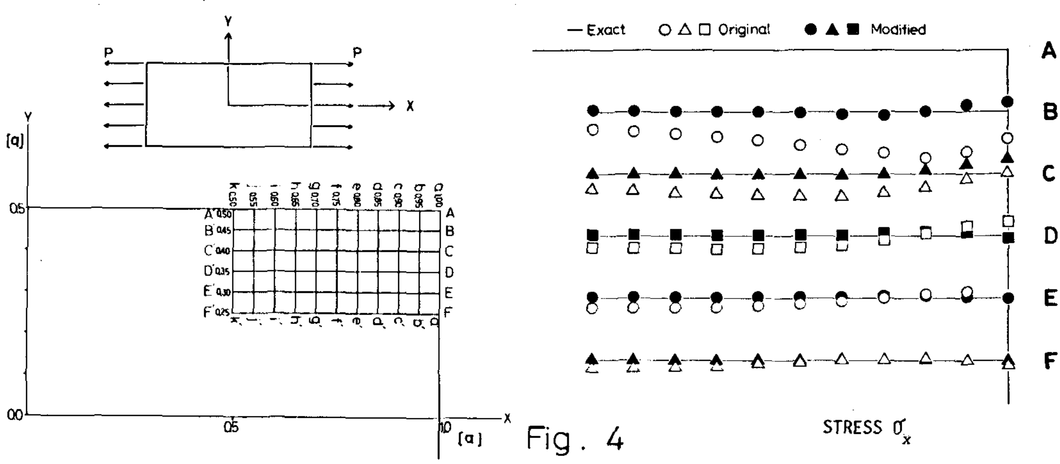

Fig. 4

参考文献 1). Little,R.W. , Elasticity, Prentice.-Hall Englewood Ciffs(1973)

2). 福井, 土木学会第36回年次学術講演会講演概要集, 第I部 17-18 (1981)