2，3の基本解

京都大学工学部　正　小林昭一
京都大学工学部　正　○西村直志

1 序　積分方程式法を用いる場合，基本解の具体的表示を求めておく必要がある．本報では，2，3の基本解と，その求め方を示す．

一般に定数係数線型偏微分方程式 $P(\frac{\partial}{\partial x})u=0$ の基本解U，即ち方程式

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U=\delta(x)\qquad(\delta:\ \text{Dirac のデルタ})\qquad ①$$

の解は，Fourier 変換を用いて次の様に書ける事が知られている;[1]

$$U(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{P_1}\cdots\int_{P_n}P^{-1}(i\xi)\,e^{i\xi\cdot x}\,d\xi.\qquad(n:\text{空間の次元})\qquad ②$$

ここに P_i は $P^{-1}(i\xi)$ の特異点を複素面内に適当に回避した $-\infty$ から ∞ への Path である．この様に一般論は簡単であるが，以下に示す様に個々の問題では多少の工夫が必要になる事が多い．なお[2]に多くの基本解が纏められている．

2 一軸面内圧縮を受ける等方板　たわみを w とし，適当に変数変換すれば，方程式

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)w=\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}+N^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)w=\delta(x)\delta(y)\qquad ③$$

を得る．ここにNは面内力のパラメータである．式②より

$$w=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix\xi}\ e^{iy\eta}}{(\xi^2+N\xi+\eta^2)(\xi^2-N\xi+\eta^2)}\,d\xi\,d\eta\qquad ④$$

となる．今，η の Path を $0<\varepsilon<|\xi|<N$ のとき複素面内で $i\sqrt{(\xi^2\pm N\xi)}$ の下，$-i\sqrt{(\xi^2\pm N\xi)}$ の上また $|\xi|<\varepsilon$ で原点の上を通る様に選ぶ(上：虚軸正方向)。この時，式④は(図1参照)

$$w=\frac{1}{8\pi N}\left[-\int_{p'\setminus I_\varepsilon(N/2)}\frac{e^{-|y|\sqrt{\{\xi^2-(N/2)^2\}}+ix(\xi-N/2)}}{\sqrt{\{\xi^2-(N/2)^2\}}(\xi-N/2)}d\xi+\int_{p'\setminus I_\varepsilon(-N/2)}\frac{e^{-|y|\sqrt{\{\xi^2-(N/2)^2\}}+ix(\xi+N/2)}}{\sqrt{\{\xi^2-(N/2)^2\}}(\xi+N/2)}d\xi\right]+f(\varepsilon,y)\qquad ⑤$$

となる．ここに $I_\varepsilon(\pm N/2)$ は点 $\xi=\pm N/2$ を中心とする長さ 2ε の区間である．また f は $\varepsilon\to0$ のとき0になる関数であり，無視できる．以上の結果を得るには式④の被積分関数の η に関する積分が，$I_\varepsilon(\pm N/2)$ で高々可積分である事に注意すればよい．式⑤の積分は $\pm N/2$ を中心とする半径 ε の半円を付け加える事によって図1の Path p 上の積分に帰着し，次の様になる；

$$w=\frac{1}{8\pi N}\left[-\int_{p}\frac{e^{-|y|\sqrt{\{\xi^2-(N/2)^2\}}+ix(\xi-N/2)}}{\sqrt{\{\xi^2-(N/2)^2\}}(\xi-N/2)}d\xi\right.$$
$$\left.+\int_{p}\frac{e^{-|y|\sqrt{\{\xi^2-(N/2)^2\}}+ix(\xi+N/2)}}{\sqrt{\{\xi^2-(N/2)^2\}}(\xi+N/2)}d\xi\right]-\frac{i}{4N}|y|.\qquad ⑥$$

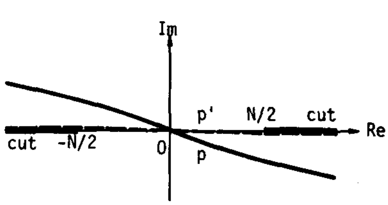

図1

さらに x で微分すれば次式を得る；

Shoichi KOBAYASHI & Naoshi NISHIMURA

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{4N}\sin(Nx/2)\,H_0^{(1)}(Nr/2), \qquad r=\sqrt{(x^2+y^2)},\quad H_0^{(1)};\ \text{Hankel 関数} \tag{7}$$

式⑦を積分する為に $w(0,y)$ を求める．式⑥で $x=0$ とし，積分路を虚軸に変えてやれば

$$w(0,y) = \frac{1}{4\pi}\int_{N/2}^{\infty}\frac{e^{is|y|}}{s^2\sqrt{(s^2-(N/2)^2)}}ds - \frac{i}{4N}|y| = \frac{i}{8}\int_0^{|y|}(Y-|y|)H_0^{(1)}(NY/2)\,dY + C \tag{8}$$

となる．ここに C は定数である．従って式③の一つの基本解として

$$w = -\frac{i}{4N}\int_0^{x}\sin(NX/2)H_0^{(1)}(N\sqrt{(X^2+y^2)}/2)\,dX + \frac{i}{8}\int_0^{|y|}(Y-|y|)H_0^{(1)}(NY/2)\,dY \tag{9}$$

を得る．面内引張の場合の基本解は[3]に於いて発見的に求められている．

3 拘束を伴なう等方線型弾性体

拘束 $\mathrm{tr}(C\nabla u)=0$（C：2階の対称テンソル）を受ける等方線型弾性体のつりあい式は，変位 u，不定応力 Cp（p：スカラー）を用いて

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}u\\ p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta^* & -C\nabla\\ -C\cdot\nabla & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ p\end{pmatrix} = 0 \quad (\Delta^*=\mu\Delta+(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot,\ \lambda,\mu:\ \text{Lamé 常数}) \tag{10}$$

と書ける．テンソル C のランクを拘束の次元[4]と呼べば，式⑩は C が空間の次元と同じ次元を有する時楕円型になる．式⑩の基本解は次式の解である；

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}U & V\\ P & Q\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta^* & -C\nabla\\ -C\cdot\nabla & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U & V\\ P & Q\end{pmatrix} = -\delta(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad (\delta(x)=\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)\cdots\delta(x_n)) \tag{11}$$

一方，式⑩より $\det(P(i\xi)) = C\xi\cdot\Delta^{*-1}(i\xi)C\xi\ \det\Delta^*(i\xi)$ となり，$\det C\neq 0$ の時には実数の $\xi\neq 0$ に対して $\det(P(i\xi))\neq 0$ である．それゆえ U，V，P は「関数」になる．Q はデルタ関数＋主値積分（$-n$ 次の斉次関数で主値の意味で可積分のもの）と書け[1]，デルタの係数は

$$\frac{1}{|S_n|}\int_{S_n}\frac{d\xi}{C\xi\cdot\Delta^{*-1}(i\xi)C\xi} \qquad \xi\in S_n \quad (S_n:\ n\text{次元単位球面},\ |S_n|;\ S_n\text{の表面積}) \tag{12}$$

となる．しかし拘束の次元＜空間の次元の場合は一般に U 以外は「関数」であるとは限らない．例えば $n=3$ のとき $C=1$（非圧縮）であれば $U=(1\Delta-\nabla\nabla)|x|/8\pi\mu$，$P=V=-\nabla/4\pi|x|$，$Q=(\lambda+2\mu)\delta(x)$ となるが，$C=i_3\otimes i_3$（x_3 方向不伸長）の場合には

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi\mu}\left[\delta_{\alpha\beta}\left\{\frac{|x_3|}{|x|\,|x|^+} + \frac{1}{\kappa R_\kappa^+}\right\} + x_\alpha x_\beta\left\{\frac{1}{|x|\,|x|^{+2}} - \frac{1}{\kappa R_\kappa R_\kappa^{+2}}\right\}\right], \quad (1\leq\alpha,\beta\leq 2)$$

$$U_{3\alpha} = U_{\alpha 3} = U_{33} = 0,$$

$$V_\alpha = P_\alpha = -\frac{\lambda+\mu}{4\pi\mu\kappa}\frac{x_\alpha}{R_\kappa^3}, \qquad V_3 = P_3 = \frac{1}{2}\delta(x_1)\delta(x_2)\,\mathrm{sgn}(x_3),$$

$$Q = (\lambda+2\mu)\delta(x) + \frac{\mu}{2}\left(\delta''(x_1)\delta(x_2) + \delta(x_1)\delta''(x_2)\right) + \frac{(\lambda+\mu)^2}{4\pi\mu\kappa}\left(\frac{1}{R_\kappa^3} - \frac{3x_3^2 x_3^2}{R_\kappa^5}\right) \tag{13}$$

となる．ここに $|x|^+=|x|+|x_3|$，$R_\kappa=\sqrt{(x_\alpha x_\alpha+\kappa x_3^2)}$，$R_\kappa^+=R_\kappa+\kappa|x_3|$，$\kappa=\sqrt{\{(\lambda+2\mu)/\mu\}}$ である．

文献

[1] 溝畑茂，偏微分方程式論，岩波，1965．[2] Ortner, V.N., ZAMP, 31, P155, 1980．[3] Dundurs, J., & Jahanshahi, A., Q.J. Mech. Appl. Math., 18, P129, 1965．[4] Pipkin, A.C., J. Elasticity, 6, P179, 1976．