

積分方程式法による異方性弾性体の解析

京都大学工学部 正員 小林昭一
 京都大学工学部 正員 西村直志
 兵庫県 正員 ○丸岡 剛

1. まえがき

近年、ポテンシャル論に基づく積分方程式法による種々の数値解析例が報告されているが、基本的には、基本解の作成又は近似に要約される。今回は、Fourier変換を用い、一重層ポテンシャル、それ自体を解析的に評価することを試みた。

2. 一重層ポテンシャル

右図の定義を以後、使用した。平面要素E上に密度 φ で分布する一重層ポテンシャルが、基本解 Γ を用い以下と表現できるとする。

$$U(x) = \int_E \Gamma(x, y) \varphi(y) dS_y$$

基本解のFourier変換した形を上式に代入すると、次式を得る。なお Δ^* は弾性体のNavier作用素である。

$$U(x) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\xi \Delta^*(i\xi) \int_E e^{i\xi \cdot (x-y)} \varphi(y) dS_y$$

次に $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ を $\bar{\xi} = \xi/|\xi|$, S_1 (単位要素)に変数変換し、 $e^{i|\xi|(x-y)}$ 部の $d|\xi|$ に関する積分を行うと δ (Diracのdelta関数)で表現できる。(iは虚数単位)

$$U(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S_1} \Delta^*(i\bar{\xi}) dS_{\bar{\xi}} \int_E \delta(\bar{\xi} \cdot (x-y)) \varphi(y) dS_y$$

なお、 Δ^{*-1} 作用素は Δ^* の余因子行列を $\det \Delta^*$ で除したもので、四次の同次式を六次の同次式で除している。ゆえに次式を得る。

$$U(x) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S_1} \Delta^{*-1}(\bar{\xi}) dS_{\bar{\xi}} \int_E \delta(\bar{\xi} \cdot (x-y)) \varphi(y) dS_y \quad (\text{記号の簡略のため}\bar{\xi}\text{を}\xi\text{とした。})$$

次に要素E上において、 $\varphi = \text{一定}$ とし、 $\varphi = 1$ の値を仮定し、前式の dS_y に関する積分を評価する。

$$\int_E \delta(\xi \cdot (x-y)) dS_y = \int \delta(\xi h - \sqrt{1-\xi^2} y) \omega(y) dy = \omega(\xi h / \sqrt{1-\xi^2}) / \sqrt{1-\xi^2} \quad (\omega\text{は}z\text{方向の要素幅})$$

ここではFig.1より、 $\xi = \xi_1 n + \sqrt{1-\xi_1^2} m$ ($-1 \leq \xi_1 \leq 1$), $x-y = h n - y m - z m^\perp$ ($n, m, m^\perp$ はFig.1に示される方向の単位ベクトル。) 次に $U(x)$ の $dS_{\bar{\xi}}$ に関する積分(図の球面上での積分)を $d\theta, d\xi_1$ に変数変換する。その結果次式を得る。

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 \Delta^{*-1}(\xi_1 n + \sqrt{1-\xi_1^2} m) \omega(\xi_1 h / \sqrt{1-\xi_1^2}) / \sqrt{1-\xi_1^2} d\xi_1 \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Delta^{*-1}(\eta_1 n + h m) \omega(\eta) d\eta \quad (\eta = \xi_1 h / \sqrt{1-\xi_1^2}, \eta_2 > \eta_1) \end{aligned}$$

また $\Delta^{*-1}(-\eta_1 n - h m) = \Delta^{*-1}(\eta_1 n + h m)$, $\omega(-\eta, m(\theta+\pi)) = \omega(\eta, m(\theta))$ より、上式の $U(x)$ は次式となる。

$$U(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi d\theta \int_{\eta_1}^{\eta_2} \Delta^{*-1}(\eta_1 n + h m) \omega(\eta) d\eta$$

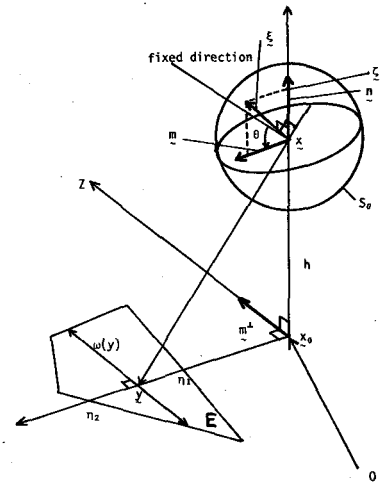


Fig. 1 座標系

さらに、上式の $d\eta$ に関する積分を評価する。そのため Cauchy 積分を導入する。
 $W(z, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\omega(\eta, m(\theta))}{\eta - z} d\eta$ なる Cauchy 積分は $W^+(z, \theta) - W^-(z, \theta) = \omega(\eta, m(\theta))$ なる性質を有する。
 なお $W^\pm$ は境界面へのそれぞれの方向からの極限を示す。ゆえに $d\eta$ に関する積分は、積分経路を囲む一周積分に置き換えられる。

$$U(x) = \frac{Sgn(h)}{2\pi^2} \int_0^\pi d\theta \oint_C \Delta^*(x\eta + m) W(hX) dX \quad (\text{なお } C \text{ は } [\eta_{h1}, \eta_{h2}] \text{ を囲む境界, } Sgn(h) \text{ は } h \text{ の符号。})$$

また、 $\Delta^*(x\eta + m) \sim O(x^{-2})$, $W(hX) \sim O(x^{-1})$ より、無限遠上での積分は $x \rightarrow \infty$ により、0 と評価される。その結果、 dX に関する積分は留数の和と表しうる。

$$U(x) = \frac{i Sgn(h)}{2\pi} \int_0^\pi d\theta \sum_{\alpha} \text{Res} [\Delta^*(x\eta + m)]_{X=X_\alpha} W(hX_\alpha, \theta) \\ = -\frac{Sgn(h)}{\pi} \int_0^\pi d\theta \sum_{\alpha} \text{Im} \{ \text{Res} [\Delta^*(x\eta + m)]_{X=X_\alpha} W(hX_\alpha, \theta) \}$$

なお $\text{Res}[\]$ は留数を示し $\sum_{\alpha}$ は α に関する和を $\text{Im} > 0$ なる部分でとる。 $\text{Im}\{ \}$ は留数の虚数部を示す。これは左辺の $U(x)$ が実数であるためによる。また X_α は、

$\det \Delta^*(x\eta + m) = 0$ の根で、複素根となる。

また同様の解析を $\nabla U(x) = \frac{\partial}{\partial x} U(x)$ に関して行なうと次式を得る。($\otimes$ はテンソル積を示す。)

$$\nabla U(x) = -\frac{Sgn(h)}{\pi} \int_0^\pi d\theta \sum_{\alpha} \text{Im} \{ \text{Res} [(x\eta + m) \otimes \Delta^*(x\eta + m)]_{X=X_\alpha} W^P(hX_\alpha, \theta) \}$$

$$\text{なお } W^P(z, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\frac{d}{d\eta} \omega(\eta, m(\theta))}{z - \eta} d\eta.$$

$h \rightarrow 0$ の極限もこれらの諸式から導かれるが、紙面の都合上省略する。

3. 数値解析例 (三次元問題)

上述により与えられた、 $\nabla U(x)$ を釣り合い式に代入し、密度関数(要素上一定)を未知数として与え、離散化し連立方程式系に定式化し、数値解析を行った。一例を示す。すなわち、対象物として横等方性弾性体を考え、異方性主軸に関する弾性定数を等方性に比し、半分の値とした。(x_3 軸が異方性主軸) 初期応力としては、 x_3 軸方向には、他の軸の倍に値する数値を与えた。境界は、円筒形のトンネル形状とし、その中央断面での主応力図を描いたのが下図である。異方性主軸はトンネル切羽に対し 20° , 40° 回転している。

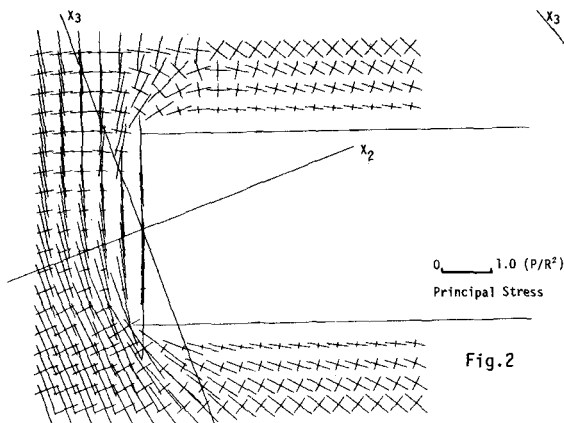


Fig.2

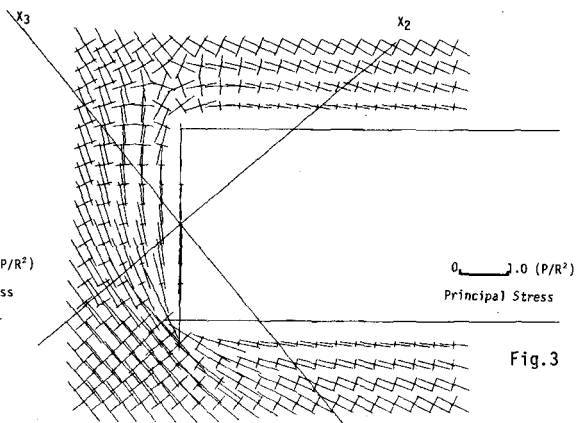


Fig.3

なお、他の数値解析例及び、解析上の留意点に関しては、当日発表する。本手法は Δ^* の形のみに依存するため、種々の異方性弾性体の解析への適用が考えられる。