平面ネットワークにおける多種流問題

大阪市立大学工学部　正員　○岡村治子
大阪市立大学工学部　正員　西村昂

1. はじめに

道路網に一定のOD構成比を与えたときの最大フローTは、道路網のグラフが平面で、すべての始点と終点が外周上にあるときは、参考文献[1][2]で求められている。ここではグラフが平面でn_1組の始点と終点が外周上にあり、他のn_2組の始点又は終点が外周上の1点であるときに求める（他の始点、終点はないものとする）。これは交通処理能力の評価に関する1つの基礎理論となるものと言える。

グラフを$G=(V, X)$で表わす。Vは点の集合，Xは辺の集合とする。単位OD表(p_{ij})は対称($p_{ij}=p_{ji}$)であるとし、点iとjを接合する線(i,j)の片側車線の容量をC_{ij}とする。Vの部分集合Kに対して、Kの点とV−Kの点とを結ぶ辺の集合を$\partial(K)$で表わしカットとよぶ。カット$\partial(K)$の容量$\sum_{(i,j)\in\partial(K)} C_{ij}$を$C(K)$であらわす。カット$\partial(K)$の断面交通$\sum_{\substack{i\in K,\, j\in V-K \\ i\leq j}} p_{ij}$を$Q(K)$であらわす。このとき最大フローは

$$T=\min_{\partial(K)}\left\{C(K)/Q(K)\right\}$$

であり，C_{ij}，Tp_{ij}（$=f_{ij}$とおく）が偶数であるときは、フローは整数で運べる（証明は省略する）。ここではTを配分するアルゴリズムを考える。$T=C(K)/Q(K)$となる$\partial(K)$を臨界カットとよぶ。

2. アルゴリズム

辺の向きを考えずに配分するのでf_{ij}とf_{ji}を同一視し、$f_{ij}=f_{ji}=\alpha$とする。αの片側車線への配分を考える（もう1つの車線に同様にしてαを配分できるのでここでは省略する)。C_{ij}，f_{ij}は偶数とする。（そうでないときは適当に定数βをかけ、最後に1単位を1/βになおせばよい。）

step1. $f_{ij}>0$ ($j=j_1,\cdots,j_e$)で点iに接合する容量が正の線が(i,k)1つしかないとき、(i,k)にf_{ij} ($j=j_1,\cdots,j_e$)を流し，Reset $f_{ij}=0$，$f_{kj}=f_{kj}+f_{ij}$ ($j=j_1,\cdots,j_e$)，$C_{ik}=0$

step2. $f_{ij}>0$，$C_{ij}>0$となるi,jがあるとき、(i,j)にf_{ij}を$\min\{C_{ij}, f_{ij}\}$（$=\gamma$とおく）流し、Reset $f_{ij}=f_{ij}-\gamma$，$C_{ij}=C_{ij}-\gamma$.

step3. step1, step2の場合がないとき、次の2つのケースがある。

(1) $f_{ij}>0$でiが外面の周上にないとき、$i=a$，$j=b$とおく。

(2) $f_{ij}>0$となるすべてのi,jが外面の周上にあるとき、$f_{ij}>0$となるi,jを1組選んで$i=a$，$j=b$とおく。

step4 aと隣接する点を$d_1, d_2, \cdots, d_k$とする。set $i=1$，a,bを含まない臨界カットでd_iを含むものがあればReset $i=i+1$. これをくりかえして上のような臨界カットがないiに対して

Haruko OKAMURA , Takashi NISHIMURA

(a,d_i) に $f_{a,b}$ を 1 流す。Reset $f_{a,b}=f_{a,b}-1$, $f_{d_i,b}=f_{d_i,b}+1$, $C_{a,d_i}=C_{a,d_i}-1$

step5. $f_{i,j}>0$ となる i,j がないときは stop. あるときは step 1 へ。

3. 例

図-1のような G を考える。

すべての辺に対して $C_{i,j}=2$ とする。

OD表は

O\D	1	2	3	4	5	8	9
1	0	0	0	1/8	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1/8	1/8
3	0	0	0	0	1/8	0	0
4	1/8	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1/8	0	0	0	0
8	0	1/8	0	0	0	0	0
9	0	1/8	0	0	0	0	0

とする。このとき $T=16$,

$f_{1,4}=2$, $f_{2,8}=2$, $f_{2,9}=2$, $f_{3,5}=2$

臨界カット $\partial(K)$ を与える K は $\{1,2,3,6,7\}$ 等である。

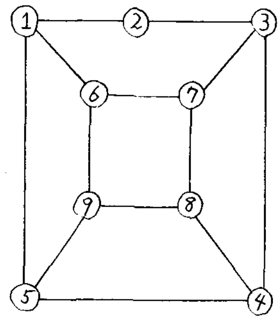

図-1

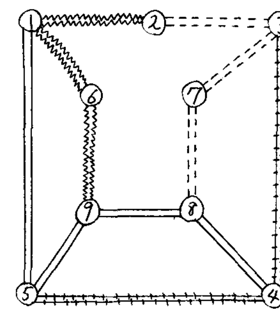

図-2

$f_{1,4}$ ————

$f_{2,8}$ - - - - - -

$f_{2,9}$ 〰〰〰

$f_{3,5}$ ++++++++

アルゴリズム

step1,2 なし

step3 $a=8$, $b=2$ とおく

step4 C_i として $(7,8)$ を選ぶ（$(8,9)$ 又は $(4,8)$ でもよい）.

$(7,8)$ に $f_{2,8}$ を 1 流す. Reset $f_{2,8}=1$, $f_{2,7}=1$, $C_{7,8}=1$

step3 $a=8$, $b=2$

step4 $(7,8)$ に $f_{2,8}$ を 1 流す. Reset $f_{2,8}=0$, $f_{2,7}=2$, $C_{7,8}=0$

step3 $a=7$, $b=2$

step4 $(3,7)$ に $f_{2,7}$ を 1 流す. Reset $f_{2,7}=1$, $f_{2,3}=1$, $C_{3,7}=1$

step3 $a=7$, $b=2$

step4 $(3,7)$ に $f_{2,7}$ を 1 流す. Reset $f_{2,7}=0$, $f_{2,3}=2$, $C_{3,7}=0$

step2 $C_{2,3}$ に $f_{2,3}$ を 2 流す. Reset $f_{2,3}=0$, $C_{2,3}=0$

step1 $(1,2)$ に $f_{2,9}$ を 2 流す.

Reset $f_{2,9}=0$, $f_{1,9}=2$, $C_{1,2}=0$

step1 $(3,4)$ に $f_{3,5}$ を 2 流す.

Reset $f_{3,5}=0$, $f_{4,5}=2$, $C_{3,4}=0$

step2 $(4,5)$ に $f_{4,5}$ を 2 流す. Reset $f_{4,5}=0$, $C_{4,5}=0$

step1 $(4,8)$ に $f_{1,4}$ を 2 流す.

Reset $f_{1,4}=0$, $f_{1,8}=2$, $C_{4,8}=0$

step1 $(8,9)$ に $f_{1,8}$ を 2 流す.

Reset $f_{1,8}=0$, $f_{1,9}=4$, $C_{8,9}=0$

step3 $a=1$, $b=9$

step4 $(1,5)$ に $f_{1,9}$ を 1 流す.

Reset $f_{1,9}=3$, $f_{5,9}=1$, $C_{1,5}=1$

step2 $(5,9)$ に $f_{5,9}$ を 1 流す. Reset $f_{5,9}=0$, $C_{5,9}=1$

step3 $a=1$, $b=9$

step4 $(1,5)$ に $f_{1,9}$ を 1 流す.

Reset $f_{1,9}=2$, $f_{5,9}=1$, $C_{1,5}=0$

step1 $(5,9)$ に $f_{5,9}$ を 1 流し, $(1,6)$ に $f_{1,9}$ を 2 流す. Reset $f_{5,9}=0$, $C_{5,9}=0$, $f_{1,9}=0$

$f_{6,9}=2$, $C_{1,6}=0$

step2 $(6,9)$ に $f_{6,9}$ を 2 流す. Reset $f_{6,9}=0$, $C_{6,9}=0$

step5 stop. 図-2の配分がえられた。

4. あとがき

step4 における i の探索を簡単にすることが今後の課題である。

5. 参考文献

[1] 岡村・西村「平面ネットワークにおける多種流問題に関する一考察」土木学会関西支部年次学術講演会概要 昭和54年

[2] Okamura and Seymour, Multicommodity flows in planar graphs, J. Combinatorial Theory Ser.B に予定