地盤工学における逆問題の適用に関する一考察

京都大学工学部　正　員　大西有三
京都大学工学部　学生員○東出明宏

1．まえがき

逆問題とは、従来の方法とは逆の手順で問題を解析しようとするものである。具体的な例として有限要素法による簡単な弾性解析をあげる。条件として変位が測定されている場合、従来の方法ではまず材料特性を仮定して剛性マトリックス[K]を作り、ベクトル式[K]{u}＝{f}を解いて変位{u}を求めた。そしてこの値と実測の値を比較して、許容できなければ仮定した材料特性をかえて計算をやりなおし、許容できるまで試行錯誤を繰り返すというのが通例である。これに対し、逆問題では、測定された変位量その他を入力既知条件とし、未知数としての材料特性を求めるという方法を採用する。現在、地盤工学においては現場計測を活用した情報化施工が脚光を浴びている。この場合、実際の計測結果(主として変位量)をもとに計算値が実測値と一致するように材料特性を変えて繰り返し計算が実施されており、地盤定数の決定が大きな課題となっている。このような状況において逆問題の手法を適用できれば、ある程度ブラックボックス的ではあるが実測値をもとに未知のパラメーターを決定できるので、実用計算上極めて有益となる。

逆問題の考え方そのものは別に目新しいものではない。簡単な線形問題においては逆も正もほぼ同じように解析がなされる。しかし、地盤工学のような複雑なシステムに逆問題が適用され始めたのは、統計処理の考えが地盤工学に導入され、その適用が成功したことによる。現在、有限要素法を用いた浸透流解析においては逆問題が大いに利用されつつある。Frind とPinder[1]は滞水層が等方性であるという条件の下で、透水量係数を逆算する方法を考案した。これは領域境界上の透水量係数と領域内の水頭分布より境界内の各節点における透水量係数を求めるものである。しかしこの方法においても解の最終的な決定は解析者の判断にゆだねられていた。さらにNeuman[2]は統計処理手法を駆使して逆問題を実際の地下水管理に利用した。そして藤縄ら[3]は入力条件を最小自乗法を用いて整理し、地質環境を拘束条件とすることによってパラメーターの同定を可能にした。また最近では、土質力学の分野でも逆問題の考え方は圧密沈下予測に適用されるようになってきた。[4] これはまず観測された沈下量から未知のパラメーターを同定して、これより将来の沈下量を予測しようとするものである。このように逆問題は多くのものに適用できる可能性を秘めている。

ところで岩盤工学でも逆問題の適用が考えられる。身近な問題は平板載荷試験である。この平板載荷試験で通常得られる情報は載荷重と表面沈下である。載荷試験の目的の1つは岩盤の変形係数を求めることであるが、そのためには有限要素法などによる計算値と実測値の比較から結果的に変形係数を推定するという作業を踏まなければならないのが現状である。これに対して逆問題の手法が適用できれば、実測結果を用いて変形係数が推定で

Yuzo　Ohnishi and Akihiro Higashide

き、これによってかなり手間をはぶくことができる。そこでまず第１歩として簡単な二次元弾性モデルを想定して材料定数を求める場合について検討する。

2. 逆問題による定式化

二次元弾性問題において応力のつりあい方程式は

$$\cdot\ \frac{\partial}{\partial x}\left\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}+F_x=0 \tag{1}$$

$$\cdot\ \frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{(\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial y}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right\}+F_y=0 \tag{2}$$

で与えられる。ここでu．vはx．y方向の変位、F_x．F_yはx．y方向の物体力、そしてλ．μはLameの定数である。一方境界条件は一般に、力学的境界S_σ上では

$$\sigma_{ij}n_j=\overset{n}{T_i} \qquad \text{on } S_\sigma \tag{3}$$

で、幾何学的境界S_u上では

$$\delta u=0 \quad \text{又は} \quad \delta v=0 \qquad \text{on } S_u \tag{4}$$

で与えられる。ここでn_jは方向余弦、$\overset{n}{T_i}$は法線nをもつ面に働く応力ベクトルである。そしてこれらの式において、Galerkin法やGauss-Green定理を使って変数の離散化を行ない整理すると次の式が得られる。ここではx方向の結果だけを示すことにする。

$$\begin{aligned}
&\cdot\sum_{e=1}^{m}\left[\left[\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\ \ \frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\ \ \frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_k}{\partial x}\ \ \frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_l}{\partial x}\right]\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\\u_k\\u_l\end{Bmatrix}+\left[\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\ \ \frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\ \ \frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_k}{\partial y}\ \ \frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_l}{\partial y}\right]\begin{Bmatrix}v_i\\v_j\\v_k\\v_l\end{Bmatrix}\right]\left[\int_{Re}\phi_i dR\ \ \int_{Re}\phi_j dR\ \ \int_{Re}\phi_k dR\ \ \int_{Re}\phi_l dR\right]\begin{Bmatrix}\lambda_i\\\lambda_j\\\lambda_k\\\lambda_l\end{Bmatrix}\\
&+\sum_{e=1}^{m}\left[\left[2\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_i}{\partial x}+\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\ \ 2\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_j}{\partial y}\ \ 2\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_k}{\partial x}+\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_k}{\partial y}\ \ 2\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_l}{\partial x}+\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_l}{\partial y}\right]\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\\u_k\\u_l\end{Bmatrix}+\left[\frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\ \ \frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_j}{\partial x}\ \ \frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_k}{\partial x}\ \ \frac{\partial\phi_i}{\partial y}\frac{\partial\phi_l}{\partial x}\right]\begin{Bmatrix}v_i\\v_j\\v_k\\v_l\end{Bmatrix}\right]\\
&\cdot\left[\int_{Re}\phi_i dR\ \ \int_{Re}\phi_j dR\ \ \int_{Re}\phi_k dR\ \ \int_{Re}\phi_l dR\right]\begin{Bmatrix}\mu_i\\\mu_j\\\mu_k\\\mu_l\end{Bmatrix}=\int_{S_\sigma}\phi_i\overset{n}{T_x}ds+\sum_{e=1}^{m}\left[\frac{1}{4}\int_{Re}\phi_i dR\cdot[1\,1\,1\,1]\begin{Bmatrix}F_{xi}\\F_{xj}\\F_{xk}\\F_{xl}\end{Bmatrix}\right]
\end{aligned} \tag{5}$$

ここに$R=\bigcup_{e=1}^{m}R_e$, $R_i\cap R_j=0\ (i\neq j)$でmは領域Rの全要素数, R_eは領域内の四角形要素である。またϕ_iは形状関数である。(5)式をマトリックス表示すると次の式になる。

$$[a]\begin{Bmatrix}\lambda\\\mu\end{Bmatrix}=[b] \tag{6}$$

3. 考察

実際の解析結果は現在まだ計算中であるため、ここではその手法を述べるだけにとどまったが、これまでに検討してわかったことは２つの困難な問題点があるということである。１つは必要境界条件が欠けているときには、一般に多数の解をもたらすということである。即ち(5)式を拘束条件だけを使って解いたのでは、解はただ１つには定まらないということである。このため必要境界条件を求めることが逆問題を解いていく上で重要となる。２番目は、誤差の問題である。これは逆問題が本来微分演算であるため数値計算上の打ち切り誤差や丸め誤差などにより解が不安定となることである。この不安定性をとりのぞくには、地質的連続性を考慮に入れパラメーターの数を減少させたり、最確値を得るため最小自乗法などの統計的手法を導入することが有効となる。

参考文献. 1) Frind, E.O. and Pinder, G.F., Water Resour. Res., 9(5), (1973)　2). Neuman, S.P., Fogg, G.E. and Jacobson, E.A., Water Resour. Res., 16(1), (1980)　3). 藤縄克之, 丸山利輔, 三野徹, 農業土木学会論文集第74号 (1978)　4). Asaoka, A. and Matsuo, M., Soil and Foundation, vol. 20, No. 4, (1980)