海峡に侵入する波浪について

明石工業高等専門学校　正員　西村益夫
正員　杉本修一
舞鶴工業高等専門学校　正員○前野賀彦

まえがき　同一の波長の波であっても、海峡に侵入する場合には、海峡の形によって、波浪の性状は変ってくる。その波浪の性状がどのように変わるのかということは、海峡付近の港を通過する船にとって、重要な問題となる。今回の報告では、x軸に対称な双曲線を考え、この双曲線を海峡とみなして、この海峡に波が進入して来る場合について、波浪の性状がどのように変化するのか、実際に数値計算を行い、検討を行うものとする。

基礎方程式　x軸に対称な双曲線は、(1)式なる座標変換として表わすことができる。

$$x = c\sinh\xi\cos\eta,\quad y = c\cosh\xi\sin\eta \quad \cdots\cdots(1)$$

一方、波動方程式は、(2)式で表わされる。

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\sigma^2}{gd}\psi = 0 \quad \cdots\cdots(2)$$

(2)式の波動方程式を(1)式により変形していくと(3)式を得る。この(3)式を基礎方程式とする。

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + \frac{c^2\rho^2}{2gd}(\cosh 2\xi + \cos 2\eta)\psi = 0 \quad \cdots(3)$$

〈入射波〉　x軸に対してαなる角度で入ってくる入射波の波動関数ψ_{11}は、(4)式のように表わすことができる。

$$\psi_{11} = \exp\{ik[x\cos(\pi-\alpha) + y\sin(\pi-\alpha)]\}$$
$$= \exp\{ik(-x\cos\alpha + y\sin\alpha)\} \quad \cdots\cdots(4)$$

また、(1)式の関係から、(5)式に示すようにおいて、(4)式を変形すると、(6)式を得る。

$$\cosh\xi\sin\alpha = P\cos\xi_\theta,\ \sinh\xi\cos\alpha = P\sin\xi_\theta \quad \cdots(5)$$

$$\psi_{11} = \exp\{-ikcP\sin(\xi_\theta - \eta)\} \quad \cdots\cdots(6)$$

しかるに、(7)式で表わされる関係があることから、(6)式は、(8)式と表わされる。

$$\exp(ix\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\{J_{2n}(x)\cos 2n\theta + iJ_{2n-1}(x)\sin(2n-1)\theta\} \quad \cdots\cdots(7)$$

$$\psi_{11} = J_0(-kcp) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\{J_{2m}(-kcp)\cos 2m(\xi_\theta - \eta)$$
$$+ iJ_{2m-1}(-kcp)\sin(2m-1)(\xi_\theta - \eta)\} \quad \cdots(8)$$

(8)式の実部をとると(9)式となる。

$$Re\,\psi_{11} = J_0(-kcp) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\{J_{2m}(-kcp)\cos(\xi_\theta - \eta)\} \quad \cdots(9)$$

また、一般に、$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$であることから、(9)式は、(10)式となる。

$$\psi_{11} = J_0(kcp) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\{J_{2m}(kcp)\cos 2m(\xi_\theta - \eta)\} \quad \cdots(10)$$

また、$\eta = \pm\eta_0$の境界上では、(11)式を満足するψ_{12}が存在しなければならない。

$$\left|\frac{\partial(\psi_{11} + \psi_{12})}{\partial\eta}\right|_{\eta = \pm\eta_0} = 0 \quad \cdots\cdots(11)$$

そこで、ψ_{12}を(12)式のように仮定して、(11)式を満足するように、係数C_mを求めると(13)式となる。

$$\psi_{12} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m\cos\left(\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta\right) \quad \cdots\cdots(12)$$

$$C_m = \pm(-1)^{m+1}\frac{\eta_0}{\pi}\frac{8m}{2m-1}J_{2m}(kcp)\sin 2m(\xi_\theta \mp \eta_0) \quad \cdots(13)$$

したがって、$0 < \eta < \frac{\pi}{2}$における波動関数ψ_Iは(14)式として表わされる。

$$\psi_I = \psi_{11} + \psi_{12}$$
$$= J_0(kcp) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\{J_{2m}(kcp)\cos 2m(\xi_\theta - \eta)\}$$
$$+ \frac{\eta_0}{\pi}\frac{8m}{2m-1}J_{2m}(kcp)\sin 2m(\xi_\theta - \eta_0)(-1)^{m+1}\cos\left(\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta\right) \quad \cdots(14)$$

また、$-\frac{\pi}{2} < \eta < 0$における波動関数$\psi_{II}$は、(15)式として表わされる。

$$\psi_{II} = \psi_{11} - \psi_{12}$$
$$= J_0(kcp) + 2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(kcp)\cos 2m(\xi_\theta - \eta)$$
$$- \frac{\eta_0}{\pi}\frac{8m}{2m-1}J_{2m}(kcp)\sin 2m(\xi_\theta + \eta_0)(-1)^{m+1}\cos\left(\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta\right) \quad \cdots(15)$$

さらに、x軸では、$0 < \eta < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \eta < 0$の両領域における$\psi$の値が一致しなければならないので、(16)式のように、(14), (15)式にψ_{13}を加減して、ψ_{13}を求めると、(17)式となる。

$$\psi_I + \psi_{13} = \psi_{II} - \psi_{13} \quad \cdots\cdots(16)$$

$$\psi_{13} = \frac{1}{2}(\psi_{II} - \psi_I) \quad \cdots\cdots(17)$$

Masuo NISHIMURA, Syuichi SUGIMOTO, Yoshihiko MAENO

$$=-\left\{(-1)^{m+1}\frac{\eta_0}{\pi}\frac{8m}{2m-1}J_{2m}(kc\rho)\sin 2m\xi_\theta\cos 2m\eta_0\cos\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta\right\}$$

したがって、ψ_I, ψ_{IV} は(18), (19)式のようになる。

$$\psi_I=J_0(kc\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(kc\rho)\cos 2m(\xi_\theta-\eta)$$
$$+\frac{8m}{2m-1}\frac{\eta_0}{\pi}(-1)^{m+1}J_{2m}(kc\rho)\sin 2m(\xi_\theta-\eta_0)\cos\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta$$
$$-\frac{8m}{2m-1}\frac{\eta_0}{\pi}(-1)^{m+1}J_{2m}(kc\rho)\sin 2m\xi_\theta\cos 2m\eta_0\cos\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta \quad\cdots(18)$$

$$\psi_{IV}=J_0(kc\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(kc\rho)\cos 2m(\xi_\theta-\eta)$$
$$-\frac{8m}{2m-1}\frac{\eta_0}{\pi}(-1)^{m+1}J_{2m}(kc\rho)\sin 2m(\xi_\theta+\eta_0)\cos\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta$$
$$+\frac{8m}{2m-1}\frac{\eta_0}{\pi}(-1)^{m+1}J_{2m}(kc\rho)\sin 2m\xi_\theta\cos 2m\eta_0\cos\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta \quad\cdots(19)$$

〈拡散波〉　海峡の最狭部を通過後拡散していく波についての波動関数を ψ_2 とすると、(20)式で示す境界条件を満足しなければならない。

$$\left|\frac{\partial\psi_2}{\partial\eta}\right|_{\eta=\pm\eta_0}=0\ ,\ |\psi_2|_{\xi=0}=|\psi_1|_{\xi=0}\quad\cdots(20)$$

そこで、ψ_2 を(21)式のように仮定して、(20)式に示した境界条件を満足するように F_m を求めると、(22)式となる。

$$\psi_2=\psi_{21}+\psi_{22}\quad\cdots(21)$$
$$=\left\{J_0(kc\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(kc\rho)\cos 2m(\xi_\theta+\eta)\right\}J_0(kc\xi)+\sum_{m=1}^{\infty}F_m\cos\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta$$
$$F_m=\pm\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8m}{2m-1}\frac{\eta_0}{\pi}(-1)^{m+1}J_{2m}(kc\rho)\sin 2m\xi_\theta\pm\eta_0J_0(kc\xi)\quad\cdots(22)$$

したがって、$0<\eta<\frac{\pi}{2}$ における波動関数 ψ_{II} と $-\frac{\pi}{2}<\eta<0$ における波動関数 ψ_{III} は(23),(24)式となる。

$$\psi_{II}=\psi_{21}+\psi_{22}\quad\cdots(23)$$
$$=\left\{J_0(kc\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(kc\rho)\cos 2m(\xi_\theta+\eta)\right\}J_0(kc\xi)$$
$$-\frac{8m}{2m-1}\frac{\eta_0}{\pi}(-1)^{m+1}J_{2m}(kc\rho)\sin 2m(\xi_\theta+\eta_0)J_0(kc\xi)\cos\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta$$

$$\psi_{III}=\psi_{21}+\psi_{22}\quad\cdots(24)$$
$$=\left\{J_0(kc\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(kc\rho)\cos 2m(\xi_\theta+\eta)\right\}J_0(kc\xi)$$
$$+\frac{8m}{2m-1}\frac{\eta_0}{\pi}(-1)^{m+1}J_{2m}(kc\rho)\sin 2m(\xi_\theta-\eta_0)J_0(kc\xi)\cos\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta$$

さらに、入射波と同様の考えにより、(25)式で表わされる ψ_{23} を求めると(26)式となる。

$$\psi_{II}+\psi_{23}=\psi_{III}-\psi_{23}\quad\cdots(25)$$
$$\psi_{23}=\frac{8m}{2m-1}\frac{\eta_0}{\pi}(-1)^{m+1}J_{2m}(kc\rho)J_0(kc\xi)\sin 2m\xi_\theta\cos 2m\eta_0\cos\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta\quad\cdots(26)$$

したがって、波動関数 ψ_{II}, ψ_{III} は(27), (28)式となる。

$$\psi_{II}=\left\{J_0(kc\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(kc\rho)\cos 2m(\xi_\theta+\eta)\right\}J_0(kc\xi)\quad\cdots(27)$$
$$-\frac{8m}{2m-1}\frac{\eta_0}{\pi}(-1)^{m+1}J_{2m}(kc\rho)\sin 2m(\xi_\theta+\eta_0)J_0(kc\xi)\cos\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta$$
$$+\frac{8m}{2m-1}\frac{\eta_0}{\pi}(-1)^{m+1}J_{2m}(kc\rho)J_0(kc\xi)\sin 2m\xi_\theta\cos 2m\eta_0\cos\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta$$

$$\psi_{III}=\left\{J_0(kc\rho)+2\sum_{m=1}^{\infty}J_{2m}(kc\rho)\cos 2m(\xi_\theta+\eta)\right\}J_0(kc\xi)\quad\cdots(28)$$
$$+\frac{8m}{2m-1}\frac{\eta_0}{\pi}(-1)^{m+1}J_{2m}(kc\rho)\sin 2m(\xi_\theta-\eta_0)J_0(kc\xi)\cos\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta$$
$$-\frac{8m}{2m-1}\frac{\eta_0}{\pi}(-1)^{m+1}J_{2m}(kc\rho)J_0(kc\xi)\cdot\sin 2m\xi_\theta\cos 2m\eta_0\cos\frac{2m-1}{2}\frac{\pi}{\eta_0}\eta$$

以上求めた(18), (19), (27), (28)式を解くことにより、海峡を通過する波浪の検討を行う。数値計算例を右図に示した。それによると、波は、海峡を通過後、波長が短くなり、回折しているようすが見受けられる。なお、図中の黒丸は、波の谷の部分を示している。また、白丸は、波の峰を示している。計算例は、周期 12sec, 水深 80m, 波長 220m, 海峡幅 400m, $\eta_0=30°$ の場合である。