

降雨継続時間を考慮したMPPモデルによる日降水量の相関解析

ハ 鹿 町 正 員 ○林 安宏
 近畿大学理工学部 正 員 江藤 剛治
 近畿大学理工学部 正 員 西村 克己

1. 目的

降水量時系列のようなガウス分布からの分布の歪の大きい、かつ不連続な現象の解析に、通常のカウス分布過程にもとづく確率統計解析法を適用することは無理である。たとえば、日降水量時系列の単純相関係数を計算すると時差1日の場合でも、ほぼ0となる。しかし、これを雨が降っているか、いないかのDry-Wet Process (0-1過程)に変換して、適当な統計解析法を適用すると日降水量時系列にも、持続性や周期性が認められることが示されている。降雨現象は、いわゆるMarked Point Process, あるいはFiltered Point Processとみなしうる。この過程は、つぎの2つの過程の合成されたものとして表される。

1)点生起過程(Point Process):蓄積されたエネルギーがある時間に一度に、瞬間的に放出される過程で不連続的。2)緩和過程(Relaxation Process):点生起過程が生じたという条件付で、エネルギーがある時間に、徐々に放出される過程で、通常は連続的。

降雨現象以外にも、このような物理的現象は多い(例;地震, 雷, 乱流中のburst-boilなど)。本論文では、このような点生起過程と緩和過程からなる物理過程の解析法について考察した。以下の成果は、間欠性をともなう乱流の解析などにも適用できる。

物理的現象を解析するうえで、点生起過程と緩和過程との両過程を全体的にとらえると、問題が複雑となって解析が困難になる場合がある。緩和過程を除いて点生起過程のみについて、あるいは逆に点生起過程が生じたという条件付で、緩和過程のみについて現象をとらえると、より容易に解析しうる場合が多い。本論文では、緩和過程をつぎのように0-1変数の形で極度に単純化した。すなわち、緩和過程が生起している場合を1、していない場合を0とする。このような変数を用いて、点生起過程および緩和過程の継続時間に関する確率構造を同時に解析するための一手法を提案する。

2. 理論

2.1 モデルの概要

本論文で取り扱うモデルを図-1に示す。ある発生率 $\lambda(t)$ で点が生起する。生起した点過程は緩和過程により、2 τ 時間継続する。2つ以上の点・緩和過程が合成され、見かけ上1つの緩和過程となる場合もある。

緩和時間($\frac{1}{2}\tau$)の確率分布形は時間的に変化してもよい。たとえば、 τ が指数分布に従うとするなら、 $f_{\tau}(t) = \beta_1 \cdot e^{-\beta_1 t}$, $\beta_1 = \beta_1(t)$

このとき、Dry-Wet Process (0-1過程)の自己相関係数を理論的に導く。

つぎのような仮定を置く。

Yasuhiro HAYASHI, Takeharu ETŌ, Katsumi NISHIMURA

1) 点生起過程は非定常的である (Inhomogeneous Poisson Process)。2) 緩和過程の継続時間 τ は、点ごとに独立。

本論文では、量 (Mark) について取り扱わない。よって、量と緩和過程の継続時間との相関関係などについて考慮する必要はない。

2.2 積率相関係数

Dry - Wet Process のもとでの積率相関係数を導く。時間 t において、緩和過程が生起している場合を $1 [x(t)=1]$ 、生起していない場合を $0 [x(t)=0]$ とする。 $[x(t)=1]$ の確率を $P(w)$ 、 $[x(t)=0]$ の確率を $P(D)$ で表すと、

$$P(D) = \text{Prob}\{x(t) = 0\} = 1 - P(w)$$

ある時間差で隔てた時間 $(t, t+\tau)$ で考えると、

$$P(D, D) = \text{Prob}\{x(t) = 0 \cap x(t+\tau) = 0\}$$

これより、積率相関係数 $r(t, t+\tau)$ の結果のみを示すと、

$$r(t, t+\tau) = [P(D, D)/P(D)^2 - 1] / [1/P(D) - 1] \quad (2.1)$$

つぎに、周期変動を考慮した場合の積率相関係数 $\widehat{r(t, t+\tau)}$ を導く。 $\Lambda(t)$ 、 $f_t(t_r)$ が周期変動すると考える。 $\Lambda(t)$ 、 $f_t(t_r)$ が基本周期 T で周期変動する場合は、次式のようになる。

$$\overline{\mu} = \overline{P(w)} = 1 - \overline{P(D)}$$

$$\widehat{r(t, t+\tau)} = [P(D, D)/P(D)^2 - 1] / [1/P(D) - 1] \quad (2.2)$$

ここに $\overline{}$ は T 内での平均を表す。 $\sim$ は周期変動を考慮した場合の値を示す。注意すべき点は、一般に $\overline{f} \neq f$ である。

2.3 点がただ1つ生起する場合 (素過程)

図-2、図-3 に示す Dry - Wet Process モデルの $P(D)$ 、 $P(D, D)$ 等を評価する。

第1段階として、ある単位期間内にただ1つの点が生起したときの $P(D)$ 、 $P(D, D)$ を考える。

まず $P(D)$ について考える。図-2 に示すように、第 $(l+j)$ 期間に、ただ1つの点が生起すると仮定する。第 $(l+j)$ 期間が緩和過程とならない確率を $g'_{(l+j)}$ とする。

$$g'_{(l+j)} = \int_{(j-1)\Delta t + \tau_j}^{(j-1)\Delta t + \tau_j + \Delta t} f_t(t_r) dt_r$$

$\Lambda(t)$ の変動に対して Δt が十分小さい、すなわち、

$$\Lambda(t+\Delta t) = \Lambda(t) + \frac{\Delta t}{\Delta t} \frac{d\Lambda}{dt} \Big|_{t=t} + \dots$$

とする場合、 $\Lambda(t) \gg \left| \frac{\Delta t}{\Delta t} \frac{d\Lambda}{dt} \Big|_{t=t} \right|$ ならば、第 $(l+j)$ 期間に中心を持つ降水事象の点生起時刻 $\{(j-1)\Delta t + \tau_j\}$ は、第 $(l+j)$ 期間内に一様に分布すると近似しうる。

ここで、 $g'_{(l+j)}$ の Δt 内の期待値 $g_{(l+j)}$ を考えると、

$$g_{(l+j)} = \int_0^{\Delta t} \frac{1}{\Delta t} g'_{(l+j)} d\tau_j \quad (2.3)$$

t の確率密度関数を指数分布とすると、式(2.3)は、

$$g_{(l+j)} = 1 - \frac{1}{\Delta t \beta} \cdot e^{-\beta(j-1)\Delta t} \cdot (1 - e^{-\beta \Delta t}) \quad (2.4)$$

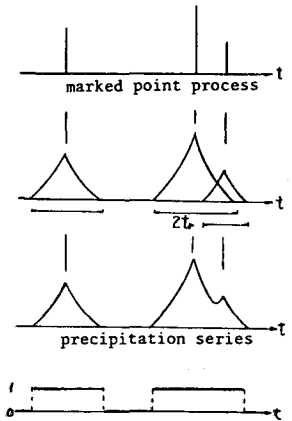


図-1 Dry-Wet Process

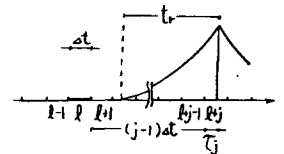


図-2 $P(D)$ Model

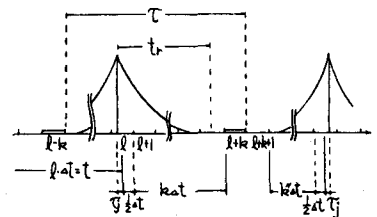


図-3 $P(D, D)$ Model

つぎに、 $P(D, D)$ を考える。図-3に示すように、時間 $\{(l+k+1)-(l-k-1)\} \cdot \Delta t$ (τ) 隔てた第 $(l+k+1)$ 期間と第 $(l-k-1)$ 期間がともに緩和過程とならない確率を $S'(l+k)$ とする。以下に、点が生起する期間列に、 $S'(l+k)$ を考える。 $S'(l+k)$ の Δt 内の期待値を $S(l+k)$ とする。

a) 第 (l) 期間内で、点が生起する場合

$$S(l) = 2 \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{(k+\frac{1}{2})\Delta t - \tau_j} f_t(t_r) dt_r d\tau_j = 1 - \frac{1}{\Delta t \beta} e^{-\beta \cdot k \cdot \Delta t} (1 - e^{-\beta \frac{\Delta t}{2}}) \quad (2 \cdot 5)$$

b) 第 $(l+1)$ 期間から第 $(l+k)$ 期間までの区間内のある期間に、点が生起する場合

点が生起した期間から第 $(l+k)$ 期間までの時間を $k' \cdot \Delta t$ とする。点が生起する期間を第 $(l+k')$ 期間とする。

$$S(l+k) = \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{(k+\frac{1}{2})\Delta t - \tau_j} f_t(t_r) dt_r d\tau_j = 1 - \frac{1}{\Delta t \beta} e^{-\beta \cdot k' \cdot \Delta t} (1 - e^{-\beta \frac{\Delta t}{2}}) \quad (2 \cdot 6)$$

$(k' = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(\tau - 4))$

同様に、第 $(l-1)$ 期間から第 $(l-k)$ 期間までの区間で、点が生起する場合の $S(l-k)$ が得られる。

$$S(l-k) = \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{(k+\frac{1}{2})\Delta t - \tau_j} f_t(t_r) dt_r d\tau_j = 1 - \frac{1}{\Delta t \beta} e^{-\beta \cdot k' \cdot \Delta t} (1 - e^{-\beta \frac{\Delta t}{2}}) \quad (2 \cdot 7)$$

$(k' = 0, -1, -2, \dots, \frac{1}{2}(\tau - 4))$

c) 第 $(l+k+2)$ 期間以上の区間のある期間に、点が生起する場合

点が生起した期間から第 $(l+k+2)$ 期間までの時間を $k'' \cdot \Delta t$ とする。点が生起する期間を第

$$(l+k'') \text{ 期間とする}$$

$$S(l+k) = \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{(k+\frac{1}{2})\Delta t - \tau_j} f_t(t_r) dt_r d\tau_j = 1 - \frac{1}{\Delta t \beta} e^{-\beta \cdot k'' \cdot \Delta t} (1 - e^{-\beta \frac{\Delta t}{2}}) \quad (2 \cdot 8)$$

$(k'' = 0, 1, 2, \dots, \infty)$

同様に、第 $(l-k-2)$ 期間以下の区間で、点が生起する場合の $S(l-k)$ が得られる。

$$S(l-k) = \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{(k+\frac{1}{2})\Delta t - \tau_j} f_t(t_r) dt_r d\tau_j = 1 - \frac{1}{\Delta t \beta} e^{-\beta \cdot k'' \cdot \Delta t} (1 - e^{-\beta \frac{\Delta t}{2}}) \quad (2 \cdot 9)$$

$(k'' = 0, -1, -2, \dots, -\infty)$

2. 4 点生起における確率特性の考慮

ここでは、降水時系列の周期性を再現しうるようなモデルを考える。 t の確率分布は時間的に変化せず、指数分布に従うとする。

ある単位期間 $(l+j)$ 期間に中心を持つ点生起回数が $0 \sim \infty$ のとき、それらいずれの素過程によっても、第 (l) 期間が1とならない確率は、

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Lambda(t) \cdot e^{-\Lambda(t)}}{j!} \{g(l+j)\}^j = \exp[-\Lambda(t) \cdot \{1 - g(l+j)\}] \quad (2 \cdot 10)$$

すべての期間の点により、第 (l) 期間が1とならない確率は、

$$P(D) = \prod_{j=-\infty}^{\infty} e^{-\Lambda(t) \cdot \{1 - g(l+j)\}} = \exp[-\Lambda(t) \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{1 - g(l+j)\}] \quad (2 \cdot 11)$$

同様に、第 $(l+k+1)$ 期間と第 $(l-k-1)$ 期間がともに1とならない確率は、

$$P(D, D) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\Lambda(t) \cdot \{1 - S(l+k)\}} = \exp[-\Lambda(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{1 - S(l+k)\}] \quad (2 \cdot 12)$$

$\Lambda(t)$ は時間的に変化し、ここでは、それをフーリエ級数で表す。

$$\begin{cases} \Lambda(t) = \lambda(t) \cdot \Delta t = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \cos \omega_n (t - t_n) & t_n : \text{位相} \\ \omega_n = \frac{2\pi}{T_n} & T_n : \text{周期} \end{cases} \quad (2 \cdot 13)$$

式(2.11)に式(2.13)を代入すると、

$$P(D) = \exp[-\sum_{j=-\infty}^{\infty} \Delta t \cdot \{1 - g(l+j)\} \cdot \{b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \cos \omega_n (t - t_n + j \cdot \Delta t)\}] \quad (2 \cdot 14)$$

式(2.14)に式(2.3), (2.4)を代入することにより, $P(D)$ を導くことができる。これは非常に複雑な式となる。基本周期 T_1 のみを考えると、すっきりした形の解析解を得ることができる。基本周期 T_1 での $P(D)$ の期待値 $\overline{P(D)}$ は,

$$\overline{P(D)} = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} P(D) dt_1 = \exp[A_0(\beta, j) \cdot b_0] \cdot I_0[B_0(\beta, j, \omega_1) \cdot b_1] \quad (2.15)$$

I_0 : 第0次の変形ベッセル関数

つぎに, $P(D, D)$ を考える。式(2.12)に式(2.13)を代入すると,

$$P(D, D) = \exp\left[-\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta t \cdot \{1 - S_{(t+k)}\} \cdot \left\{b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \omega_n \cdot (t - t_n + k\Delta t)\right\}\right] \quad (2.16)$$

式(2.16)に式(2.5), (2.6), (2.7), (2.8), (2.9)を代入すると, $P(D, D)$ が導かれる。これも, $P(D)$ と同様に考える。基本周期 T_1 での $P(D, D)$ の期待値 $\overline{P(D, D)}$ は,

$$\overline{P(D, D)} = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} P(D, D) dt_1 = \exp[A'_0(\tau, \beta, k) \cdot b_0] \cdot I_0[B_0(\tau, \beta, k, \omega_1) \cdot b_1] \quad (2.17)$$

$\overline{P(D, D)}$ は, τ (時差)が奇数, あるいは偶数によって, 異なった式形となる。

A_0, B_0, A'_0, B'_0 の式形については, 紙数の関係で割愛する。 Δt を無限に小さくして, 極限をとると, これらは比較的単純な式形となる。すなわち,

$$A_0(\beta) = -2/\beta$$

$$B_0(\beta, \omega_1) = -2\beta / (\omega_1^2 + \beta^2)$$

$$A'_0(\beta, \tau) = -2 \cdot (2 - e^{-\beta \frac{\tau}{2}}) / \beta$$

$$B_0(\beta, \omega_1, \tau) = -2\beta \cdot (2 \cos \omega_1 \frac{\tau}{2} - e^{-\beta \frac{\tau}{2}}) / (\omega_1^2 + \beta^2)$$

式(2.15), (2.17)を式(2.2)に代入すれば, 自己相関係数が求まる。たとえば, もっとも単純な場合で, 点発生率 $\Lambda(t)$ に周期性がないときは, 次式のように Double Exponential型の減衰関数となる。ここに $\beta = 1/\mu_r$, μ_r は t_r の期待値。

$$r(t, t+\tau) = \frac{[\exp[-2\Lambda\{1 + \frac{\mu_r}{2\tau}(2 - e^{-\frac{\tau}{2\mu_r}})\}]/\exp[-2\Lambda\{1 + \frac{2\mu_r}{2\tau}\}]] - 1}{[1/\exp[-\Lambda\{1 + \frac{2\mu_r}{2\tau}\}]] - 1} \quad (2.18)$$

3. 実測資料への適用

$P(D), P(D, D)$ の理論式から得られるテトラコリック自己相関係数²⁾と, 実測降水量資料から得られるそれとの比較を,

図-4, 図-5に示す。安定

した解が得られない場合もあるが,

これまで検出されたことのない, 日降水量変動に内在する周期性などが検出されている。たとえば, 11月の例では, 平均降水発生率は0.46

(1/day)程度, それに対する周期成分は49.5%程度, 降水

の生じしやすい気象状況の平均持続時間 $2\mu_r$ は6.34時間程度である。

[参考文献] 1) 西村・江藤; 25回水理講演学論文集, 1981年2月

2) 安田・海野; 社会統計学改訂2版, 丸善, 1977

11月 $T_1=4.39$
 $b_0=0.46$
 $b_1=0.23$
 $\beta=7.57$

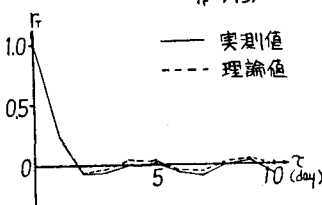


図-3 テトラコリック自己相関係数の理論値と実測値

5月 $T_1=4.73$
 $b_0=0.48$
 $b_1=0.22$
 $\beta=5.08$

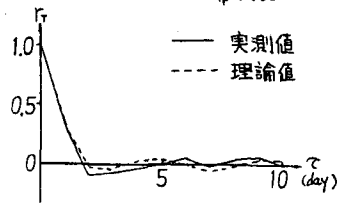


図-4 同左