

乱流拡散の数値シミュレーション

京都大学工学部 正員 岩佐義朗
水資源開発公団 正員 森田義則

京都大学工学部 正員 綾 史郎
京都大学大学院○学生員 西川秀昭

1. はじめに；本研究は、二次元せん断乱流場における主流方向の混合について、Euler的解析法、およびLagrange的解析法に基づき、乱流拡散の数値シミュレーションを行ったものであり、両手法によって得られた結果より、このような流れの場における混合特性を明らかにするとともに、Lagrange的乱れ特性量について若干の知見を得た。

2. 数値シミュレーション法；局所平均流速 $\bar{u}_x$ の分布形として、対数則を有するせん断乱流場において、線源として投入されたトレーサの乱流拡散の数値シミュレーションを以下に示す二つの手法を用いて行い、断面平均濃度のモーメントの挙動を調べた。

2.1. Euler的解析法；基礎方程式として、Eulerの二次元乱流拡散方程式（但し $\bar{u}_y = 0$ とする）

表 - 1

	(1) $\epsilon_x/\bar{u}_x$	(2) $\epsilon_y/\bar{u}_x$	(3) $u_x^2/\bar{u}_x^2$	(4) $u_y^2/\bar{u}_x^2$	(5) $(u_x(0)-u)/\bar{u}_x$
Run-E100	1.802	0.276	2.50	0.383	-10.32
Run-E110	1.802	0.276	2.50	0.383	-20.00
Run-E300	1.802	$\kappa/6$	2.50	0.0926	-10.32
Run-E310	1.802	$\kappa(n-n^2)$	2.50	0.0926	-10.32
Run-E101	1.802	0.276	2.50	0.383	-4.18
Run-E301	1.802	$\kappa/6$	2.50	0.0926	-4.18
Run-E311	1.802	$\kappa(n-n^2)$	2.50	0.0926	-4.18

$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}_x \frac{\partial}{\partial x} \bar{c}_x) = \epsilon_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{c}_x + \bar{c}_y (\epsilon_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{c}_y)$ (1) を用いてADI法によって数値計算を行なった。実際の数値計算にあたっては、(1)式を d 、 u_x を用いて無次元化するとともに、移動座標 $\xi = (x - \bar{u}_x t)/d$ に改めた。

④計算条件、対数則に従う局所平均流速を図1に示す14分割(実線・一点鎖線)、11分割(破線)の格子点に与え、表-1に示す乱流拡散係数の組合せについて計算した（水路床の流速は、数値積分し流量が0となるように定めた。）

表 - 2

	$D_H/\bar{u}_x$	$D_E/\bar{u}_x$
Run-E100	3.48	3.42
Run-E110	3.85	3.72
Run-E300	8.70	8.46
Run-E310	8.43	---
Run-E101	3.05	2.77
Run-E301	6.97	5.79
Run-E311	6.06	---

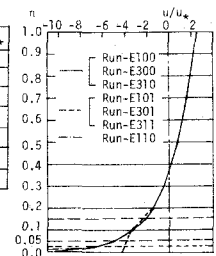


図 - 1

⑤分散係数、表2(1)欄に断面平均濃度より、モーメント法によって決定された分散係数値を示した。表2(2)欄は与えられた条件のもとに、Elderの推定式⁽²⁾

$$D_E/\bar{u}_x = \epsilon_x/\bar{u}_x + \int_0^1 dL/\theta_y \int_0^1 (4\eta L + 1) d\eta / \kappa^2 \quad (\kappa = 0.4) \quad (2)$$

に従って数値積分して求めた分散係数である。Elderの解析⁽¹⁾に相当する計算例は、Run-E310であるが、この場合(2)式に従って解析的に求められる分散係数は、 $D_E/\bar{u}_x = 8.11 (= 1.80 + 6.31)$ である。数値シミュレーションより得られる分散係数と数値積分して得られる分散係数では、極めてよい一致をしているとともに解析的に得られる値とも良い一致をしている。E100, E110, E101の例に見られるように ϵ_y が大きい時、水路床の流速の与え方による分散係数の違いはほとんどないが、E300, E301, およびE310, E311の例のように ϵ_y が小さい時その差はやや顕著となる。また、E100, E300, E310, およびE101, E301, E311の結果から ϵ_y の分布形の影響は小さく、むしろ ϵ_y の平均的な値の違いにより、分散係数の値が影響されていることも知られる。

2.2. Lagrange的解析法；流体中の1つの粒子の運動に着目する。時刻 $t = n\Delta t$ に (x^n, y^n) に存在した粒子が、 Δt 時間後に (x^{n+1}, y^{n+1}) に移動したとする時、両者の位置の関係を、

YOSHIKI IWASA ; SHIROU AYA ; YOSHINORI MORITA ; HIDEAKI NISHIKAWA

$$\begin{aligned} X^{(n+1)} &= X^{(n)} + \{ \bar{u}_x (Y^{(n)} + Y^{(n+1)})/2 + \bar{u}_x (X^{(n)} Y^{(n)}, \text{nat}) \} \cdot \Delta t \\ Y^{(n+1)} &= Y^{(n)} + \bar{u}_y (X^{(n)}, Y^{(n)}, \text{nat}) \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (3)$$

で近似する。Euler的乱れ成分 $(\bar{u}_x, \bar{u}_y)$ は、井上の乱子仮説に基づく、日野の複号乱数列モデル⁽²⁾を用いて発生させた。また乱流場は、単純に等質であると仮定している。乱れ強さは、浅野⁽³⁾、Lumley⁽⁴⁾らの実験結果より表3のように定めた。シミュレーションにおいて

発生させた粒子数は、断面内の10点より200個ずつ、合計2000個である。シミュレーションによって得られたLagrange的乱れ強さ、分散係数を表4に示す。

2.3. 両解析法の比較；計算条件はほぼ同一とみられる

E100とL10, E300とL30を比較すると、いずれの場合もLagrange的解析法による場合の方が、分散係数、統計的分散とも若干大きい(図2)が、その波形は、

ほぼ同一と見てよく(図3), 2.1.で述べたように、 ϵ_0 の分布形は、全体の挙動にさほど影響を与えないから、このようなLagrange的シミュレーション法で移流分散現象は、シミュレーションできると考えられる。

2.4. Lagrange的乱れ特性；Lumley⁽⁵⁾によれば、Lagrange的乱れ強さ、統計的分散、分散係数は、

$$[\bar{u}_x^2] = \int_0^t \{ (\bar{u}_x - \bar{u})^2 + \bar{u}_x^2 \} d\tau \quad (4)$$

$$[X^2] = 2[\bar{u}_x^2] \int_0^t R_L(\tau) d\tau \quad (5)$$

$$D = [\bar{u}_x^2] \int_0^t R_L(\tau) d\tau \quad (6-1), \quad D_{00} = [\bar{u}_x^2] T_L \quad (6-2)$$

であり、対数則を用いると $\int_0^t (\bar{u}_x - \bar{u}) \bar{u}_x d\tau = 6.25$ である。表3, 4の結果より、このようなシミュレーションにより、(4)式が満足されていることがわかる。

図4は、自己相関関数 $R_L(\tau)$ として、指数関数を用いた時の(5)式と実験結果を示したものであり、良い一致をしている。表5は、(6-2)式、Fischerの推定式 $T_F = T_L/4.8$ 、および乱れ特性より求められたLagrangian Integral Time Scaleを示したものであるが、Fischerの式は、比較的良い推定値を与えている。

3. おわりに；本研究において乱流拡散現象におけるいくつかの知見を得た。特にLagrange的計算法の妥当性が確認された。

《参考文献》 (1) Elder (1959) J.F.M. Vol. 5, No. 4

(2) 日野幹隆 (1965) 第9回水理講演集

(4) Laufer (1954) NACA Rep. No. 1174

(3) 浅野富夫 (1980) 京都大学博士論文

(5) Lumley (1972) A First Course in Turbulence (MIT Press)

表-3

	(1) ϵ_x/du_x	(2) ϵ_y/du_x	(3) $\bar{u}_x^2/u_x^2$	(4) $\bar{u}_y^2/u_x^2$	(5) $\bar{u}_x(0-\bar{u})/u_x$
Run-L10	1.802	0.276	2.50	0.383	log-law
Run-L20	0.000	0.276	0.00	0.383	log-law
Run-L30	1.802	$\kappa/6$	2.50	0.0926	log-law
Run-L40	0.000	$\kappa/6$	0.00	0.0926	log-law
Run-L50	1.802	1.802	2.50	2.50	log-law
Run-L60	1.802	0.200	2.50	0.276	log-law

表-4

	(1) $[\bar{u}_x^2]/u_x^2$	(2) $[\bar{u}_y^2]/u_x^2$	(3) D_H/du_x	(4) $[\bar{u}_x^2]T_{SL}$	(5) $[\bar{u}_x^2]T_{SL}$
Run-L10	8.23	0.360	5.45	5.51	7.67
Run-L20	5.82	0.384	3.61	3.74	6.02
Run-L30	8.41	0.094	11.80	15.80	16.94
Run-L40	6.40	0.093	10.00	10.59	12.49
Run-L50	8.43	2.550	2.87	2.75	5.00
Run-L60	7.84	0.310	6.05	3.97	7.25

(4) T_{SL} : 相関係数より求めたもの。(5) T_{SL} : スペクトルより推定した値。

表-5

	(1) T_L	(2) T_F	(3) T_{SL}	(4) T_{SL}
Run-L10	0.660	0.367	0.793	0.929
Run-L20	0.625	0.367	0.692	1.034
Run-L30	1.403	1.513	1.878	2.013
Run-L40	1.560	1.513	1.655	1.951
Run-L50	0.340	0.056	0.326	0.593
Run-L60	0.770	0.507	0.507	0.925

(3) T_{SL} : 相関係数より求めたもの。(4) T_{SL} : スペクトルより推定した値。

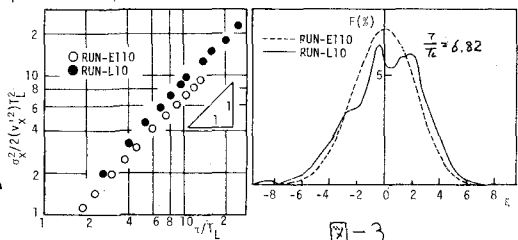


図-2

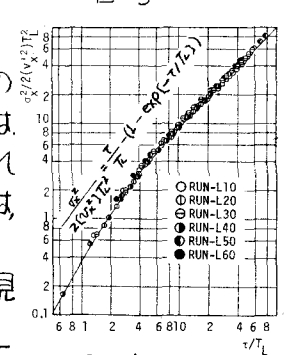


図-3

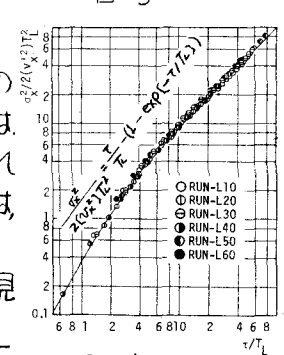


図-4