

圧縮と面内曲げをうける矩形板の面外有限変形挙動

大阪大学工学部 正員 前田幸雄
大阪大学工学部 正員 ○大倉一郎

1. まえがき 著者らは、繰り返し曲げをうける薄肉プレートガーダーのウェブ周辺に発生する疲労き裂つに関する研究で、この種の疲労き裂つを防止するためには、初期たわみを有するウェブの面外変形挙動を明らかにする必要があることを示した¹⁾。疲労き裂つは、非対称断面のプレートガーダー²⁾のウェブの面外変形や、水平補剛材を有するプレートガーダー³⁾の圧縮フランジと水平補剛材との間のウェブの局部的な面外変形によっても発生する可能性がある。このようなプレートガーダーのウェブの面外変形挙動は、圧縮と面内曲げをうける矩形板の面外変形挙動を解析することによって調べることができる。本研究では、圧縮と面内曲げをうける矩形板の弾性面外有限変形挙動について解析したので、以下に報告する。

2. Galerkin法による定式化 右図に示すように、 $a \times b$ の矩形板に、次式で与えられる圧縮力 P と曲げモーメント M が作用している。

$$P = -\frac{1+\psi}{2} \sigma_0 t_w b \quad (1), \quad M = \frac{1-\psi}{2} \sigma_0 t_w \frac{b^2}{6} \quad (2),$$

ここに、 $-1 \leq \psi \leq 1$, t_w : 板厚。

境界条件を次のように与える。

$$\left. \begin{array}{l} \text{面外方向に対して4辺単純支持: } x=0, a \text{ で } w=0, \partial^2 w / \partial x^2 = 0, \\ y=0, b \text{ で } w=0, \partial^2 w / \partial y^2 = 0. \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\text{面内方向に対して, } x=0, a \text{ で } t_w \int_0^b \sigma_{mx} dy = P, \quad t_w \int_0^b \sigma_{mx} (y - \frac{b}{2}) dy = M. \quad (4)$$

$y=0, b$ の面内方向の境界条件については、次の2つの場合を考慮する。

$$\text{条件 (a): } \int_0^a \sigma_{my} dx = 0, \quad v(x, b) - v(x, 0) = \text{constant}. \quad (5)$$

$$\text{条件 (b): } \sigma_{my} = 0, \quad \tau_{mxy} = 0. \quad (6)$$

初期たわみ w_0 と荷重による付加面外たわみ w をそれぞれ次式で仮定する。

$$w_0 = \sin(\pi x/a) \{ e_1 \sin(\pi y/b) + e_2 \sin(2\pi y/b) \}, \quad (7)$$

$$w = \sin(\pi x/a) \{ e_1 \sin(\pi y/b) + e_2 \sin(2\pi y/b) \}, \quad (8)$$

ここに、 e_1 と e_2 : 既知定数、 e_1 と e_2 : 未定定数。

式(7),(8)をMarguerre が与えた初期たわみを有する板の基礎微分方程式のうちのひずみの適合条件式に代入し、境界条件を考慮して解くと、次式の応力関数 F が得られる。

$$F = F_0 + F_1 + F_2, \quad (9)$$

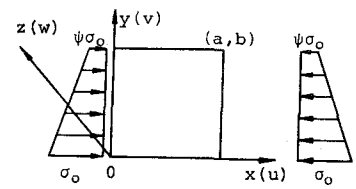


図 解析モデル

$$F_0 = \frac{1-\nu^2}{\pi^2} \frac{b^4}{a^2} \sigma_e \left\{ \frac{3}{8} \frac{\theta_1}{t_w^2} \cos \frac{2\pi y}{a} + \frac{3}{32} \frac{\theta_2}{t_w^2} \cos \frac{4\pi y}{a} - 3 \frac{\theta_3}{t_w^2} \left(\cos \frac{\pi y}{a} - \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi y}{a} \right) \right\} \\ + \frac{1-\nu^2}{\pi^2} b^2 \sigma_e \cos \frac{2\pi x}{a} \left\{ \frac{3}{8} \frac{a^2}{b^2} \frac{\theta_1 + 4\theta_2}{t_w^2} + 3 \frac{\theta_3}{t_w^2} \left(\frac{9}{\theta_1} \cos \frac{\pi y}{a} - \frac{1}{\theta_2} \cos \frac{3\pi y}{a} \right) \right\}, \quad (10)$$

$$F_1 = -\frac{1}{3} \left\{ -\frac{1-\psi}{2} \sigma_0 + (1-\nu^2) r_1 \frac{\theta_3}{t_w^2} \sigma_e \right\} \frac{y^3}{b} + \frac{1}{2} \left\{ -\sigma_0 + (1-\nu^2) r_1 \frac{\theta_3}{t_w^2} \sigma_e \right\} y^2, \quad (11)$$

$$F_2 = \left[\begin{aligned} &0 \text{ [条件 (A)]}, \\ &(1-\nu^2) r_2 \frac{\theta_3}{t_w^2} \sigma_e \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{3} \frac{y^3}{b} \right) + (1-\nu^2) \frac{a^2}{4\pi^2} \sigma_e \left(A \cosh \frac{2\pi y}{a} + B \sinh \frac{2\pi y}{a} \right. \\ &\left. + C \frac{2\pi y}{a} \cosh \frac{2\pi y}{a} + D \frac{2\pi y}{a} \sinh \frac{2\pi y}{a} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \text{ [条件 (B)]}, \end{aligned} \right] \quad (12)$$

ここに, $\theta_1 = (e_{01} + e_1)^2 - e_{01}^2$, $\theta_2 = (e_{02} + e_2)^2 - e_{02}^2$, $\theta_3 = (e_{01} + e_1)(e_{02} + e_2) - e_{01}e_{02}$,

$$\sigma_e = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_w}{b} \right)^2, \quad \theta_1 = \left(4\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2, \quad \theta_2 = \left(4\frac{b}{a} + 9\frac{a}{b} \right)^2, \quad r_1 = \frac{72}{\pi^2} \left\{ -\frac{4}{9} \frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \right\},$$

$$r_2 = -\frac{36}{\pi^2} \left(\frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right), \quad A = -\frac{3}{2} \frac{\theta_1 + 4\theta_2}{t_w^2} - 12 \frac{b^2}{a^2} \frac{\theta_3}{t_w^2} \left(\frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right), \quad B = -C = \frac{3}{2} \frac{\theta_1 + 4\theta_2}{t_w^2} \times$$

$$\frac{\cosh(2\pi b/a) - 1}{\sinh(2\pi b/a) + 2\pi b/a} + 12 \frac{b^2}{a^2} \frac{\theta_3}{t_w^2} \left(\frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \frac{\cosh(2\pi b/a) + 1}{\sinh(2\pi b/a) - 2\pi b/a}, \quad D = \frac{3}{2} \frac{\theta_1 + 4\theta_2}{t_w^2} \times \\ \frac{\sinh(2\pi b/a)}{\sinh(2\pi b/a) + 2\pi b/a} + 12 \frac{b^2}{a^2} \frac{\theta_3}{t_w^2} \left(\frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \frac{\sinh(2\pi b/a)}{\sinh(2\pi b/a) - 2\pi b/a}.$$

応力関数 F と式(7), (8)を前述の板の基礎微分方程式のうちのつり合い方程式に代入して, Galerkin法を適用すると, 荷重と面外たわみの関係が次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} &\theta_3 \frac{e_1}{t_w} + (1-\nu^2) \left\{ \frac{3}{4} \frac{\theta_5}{t_w^3} \theta_1 (e_{01} + e_1) + 3 \frac{\theta_7}{t_w^3} \theta_2 (e_{01} + e_1) + 3 \frac{\theta_8}{t_w^3} \theta_3 (e_{02} + e_2) \right\} - \left(\frac{1+\psi}{2} \frac{e_{01} + e_1}{t_w} + \right. \\ &\frac{32}{9\pi^2} \frac{1-\psi}{2} \frac{e_{02} + e_2}{t_w} \left. \right) \frac{\sigma_0}{\sigma_e} = 0, \quad \theta_4 \frac{e_2}{t_w} + (1-\nu^2) \left\{ \frac{3}{4} \frac{\theta_4}{t_w^3} \theta_2 (e_{02} + e_2) + 3 \frac{\theta_7}{t_w^3} \theta_1 (e_{02} + e_2) + \right. \\ &\left. 3 \frac{\theta_8}{t_w^3} \theta_3 (e_{01} + e_1) \right\} - \left(\frac{1+\psi}{2} \frac{e_{02} + e_2}{t_w} + \frac{32}{9\pi^2} \frac{1-\psi}{2} \frac{e_{01} + e_1}{t_w} \right) \frac{\sigma_0}{\sigma_e} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\theta_3 = \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2, \quad \theta_4 = \left(\frac{b}{a} + 4\frac{a}{b} \right)^2, \quad \theta_5 = \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 - J_1, \quad \theta_6 = \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 16\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 16J_1, \quad \theta_7 = \left(\frac{a}{b} \right)^2 - J_1,$$

$$\theta_8 = \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \frac{81}{4\theta_1} + \frac{1}{4\theta_2} + \frac{32}{27\pi^2} r_1 - J_2; \text{ 条件 (A) の場合 } J_1 = J_2 = 0; \text{ 条件 (B) の場合 } J_1 =$$

$$\frac{2}{\pi} \frac{a^3}{b^3} \frac{\cosh(2\pi b/a) - 1}{\sinh(2\pi b/a) + 2\pi b/a}, \quad J_2 = -\frac{32}{27\pi^2} r_2 + \frac{16}{\pi} \frac{b}{a} \left(\frac{9}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right)^2 \frac{\cosh(2\pi b/a) + 1}{\sinh(2\pi b/a) - 2\pi b/a}.$$

参考文献 1) 34回年講概要集 (I-48).

2) Parsanejad, S. and A. Ostapenko: On the Fatigue

Strength of Unsymmetrical Steel Plate Girders, WRC, Bull. No. 156, Nov. 1970. 3) 昭和55年度関面支部 (I-

44). 4) Marguerre, K., Proc. 5th International Congress for Applied Mechanics, Cambridge, pp. 93-101, 1938.