

強制変位を受ける構造物のカタストロフィー特性について

京都大学工学部 正 員 丹羽 義次

京都大学工学部 正 員 渡辺 英一

京都大学大学院 学生員 〇 勇 秀憲

1. きえがき

構造物の耐荷力と初期不整の関係は、カ
タストロフィー理論では耐荷力-初期不整
空間における分岐集合としてとらえること
ができる。

本報告では、離散化手法とモード変換法
を用いたカタストロフィー解析を強制変位
下の構造物に拡張する。その結果、強制変
位を与えられる構造物の方が、そうでない
ものより安定性が高いことがわかった。

また、特に補剛板の分岐集合を求めた。

2. 解析手法

離散化モデルの面内変位が強制的に拘束
された場合についてその概略を以下に示す。

弾性非線形問題の釣合い式は、

$$\begin{pmatrix} K_{im}^{uu} & K_{in}^{uw} \\ K_{jm}^{wu} & K_{jn}^{ww} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_m \\ w_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q_i^u \\ Q_j^w \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ C_j^w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_i^u \\ P_j^w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここに、 u_m, w_n は面内・面外変位、 P_i^u, P_j^w は
面内・面外等価節点力、 $K_{im}^{uu}, K_{in}^{uw} = K_{ni}^{wu}, K_{jn}^{ww}$ は線
形剛性行列、 Q_i^u, Q_j^w および C_j^w は2次・3次の非
線形抵抗力である。

(1)式の面内釣合いより、 $F_{im} = (K_{im}^{uu})^{-1}$ とあくと、

$$u_m = F_{im} P_i^u - F_{im} K_{in}^{uw} w_n - \frac{1}{2} F_{im} Q_i^u \quad (m=1, 2, \dots, r) \quad (2)$$

面内変位が拘束される時には、 P_i^u は与え
られた荷重形状 P_i^u とその大きさ Δ および拘
束による節点力 λ_i を表わされる。

$$P_i^u = \Delta P_i^u + \lambda_i \quad (3)$$

面内力がすべて与えられている場合 $\lambda_i = 0$
については、すでに文献2)の中で論じた。

$\lambda_i \neq 0$ の場合は次のようにして λ_i を決定する。

いま、ある面内変位 u_p がそれ以外の面内
変位 u_q の線形結合で表現されるような強制
変位を受ける場合を考える。つまり、

$$u_p = f_{pq} u_q \quad (p=1, 2, \dots, s; p \neq q) \quad (4)$$

ここに、 f_{pq} は定数行列。(2),(3)式を(4)式に代
入し、 λ_i について解くと、

$$\lambda_i = G_{ik} K_{kn}^{uw} w_n + \frac{1}{2} G_{ik} Q_k^u - \Delta G_{ik} P_{ok}^u \quad (5)$$

$$G_{ik} = H_{ip} H_{pk} \quad (i=1, \dots, s; k=1, \dots, r), \quad H_{ip}^* = (H_{ip})^{-1} \quad (p, i=1, \dots, s)$$

$$H_{pk} = F_{pk} - f_{pq} F_{qe} \quad (p=1, \dots, s; p \neq q); \quad q=1, \dots, r) \quad (6)$$

(5)式を(3)式に代入すると、(2)式は、

$$u_m = \Delta F_{im}^* P_{oi}^u - F_{im}^* K_{in}^{uw} w_n - \frac{1}{2} F_{im}^* Q_i^u \quad (7)$$

ここに、 $F_{im}^* = F_{im} - F_{ie} G_{em} \quad (i,m=1, 2, \dots, r); \quad e=1, 2, \dots, s)$

結局、(7)式を(1)式に代入することにより
面外変位 w_n と荷重パラメータ Δ で表現され
た釣合い式を得る。この釣合い式はモード
変換を用いて低次元化され、不安定現象に
本質的にかかわる変数(モード)のみで表わす
ことができる。そしてこの式を使ってモデ
ルのカタストロフィー特性を把握する。

3. 数値解析例

a) 正方形無補剛板

Table 1は、一様面内圧縮力を受ける周辺単
絶支持正方形無補剛板の安定性を示してい
る。各分割数(3×3から8×8)に対して、上側
には1次波形の座屈係数を、下側にはその
波形に対する4次の安定性係数 A_{1111} (A はポ
テンシャルエネルギー)を記してある。 A_{1111}
のうち、最初の値は圧縮応力の面内変位を一

定に保つ変位制御拘束)のときで、括弧内の値は、圧縮面内載荷荷重を一定に保つ荷重制御のときである。後者の方が安定性が高く、より大きな後座屈強度が見込まれる。

これらは総じて、安定対称座屈、くさびのカタストロフィーを示す。

なお、正方形板の縦横比1、幅厚比100、ポアソン比 $1/3$ である。(以下も同じ。)

b) 正方形補剛板非対称補剛板

Table 2は、一様面内圧縮力を受ける周辺単純支持の非対称補剛板を有する正方形板の安定性を示している。断面積比 $\delta=0.1$ を一定にし曲げ剛比 γ をパラメータにして6個の場合について検討した。Case1は、全体座屈が局所座屈に先行する場合で、 $A_{111} \neq 0$ だから非対称座屈、折り目のカタストロフィーである。逆に、Case6は、局所座屈が全体座屈に先行し $A_{111} \neq 0$ 、 $A_{111} > 0$ だから、安定対称座屈、くさびのカタストロフィーである。Case3は、全体座屈と局所座屈が同時に起こる場合で、単一傾斜座屈、双曲的へそのカタストロフィーである。

次に、同時座屈Case3の場合の初期不整の鋭敏性をFig.1に示す。この図で、EPS1, EPS2はそれぞれ局所座屈モードおよび全体座屈モードに対応する初期不整を示し、PMAXは耐荷力である。図は典型的な単一傾斜座屈点をもつ双曲的へそのカタストロフィーの分岐集合である。これはThompson and Hunt³⁾の結果に全く一致している。

EPS1=0.5(板幅の200分の1)、EPS2=0のとき耐荷力は座屈荷重のおよそ97%、EPS1=0、EPS2=0.5のとき98%まで低下する。

なお、a)の場合と同様に変位拘束の方が荷重制御より安定性は高い、つまり後者の方が初期不整に対して鋭敏である。

詳細は当日O.H.P.で発表する。

Table 1. Stability of Square Plates

$\frac{P}{\sigma_y} \frac{b}{\pi^2 D}$	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8
$\frac{b^2}{Eh} A_{1111}$	3.830	3.901	3.936	3.955	3.967	3.975
	(34.24)	(10.72)	(16.14)	(10.88)	(13.38)	(10.93)

Table 2. Stability of Stiffened Plates

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5	Case 6
$\gamma = \frac{EI}{bd^3}$	5.0	10.0	14.7	14.8	14.9	15.0
$\delta = \frac{A_0}{bh}$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
k_1 (1st mode)	8.5895	14.107	14.295	*14.295	*14.295	*14.295
k_2 (2nd mode)	11.515	14.280	*14.295	14.296	14.298	14.299
$\frac{b^2}{Eh} A_{1111}$	28.178	105.50	400.51	482.37	529.37	541.58
$\frac{b^2}{Eh} A_{2222}$	169.43	98.726	448.71	426.67	467.99	475.86
$\frac{b}{Eh} A_{111}$	0.3745	0.0133	0.0066	0.0004	0.0002	0.0001
$\frac{b}{Eh} A_{122}$	0.0933	0.0160	0.0028	0.00006	0.00003	0.00002
$\frac{b}{Eh} A_{222}$	0.1993	-0.031	0.0005	0.0069	0.0075	0.0075
$\frac{b}{Eh} A_{112}$	0.0809	0.0166	0.00008	0.0030	0.0032	0.0032
$\frac{2A_{11}^2}{A_{22}^2} - \frac{A_{111}^2}{A_{122}^2}$	---	---	-0.0490	-4.561	---	---
$\frac{2A_{22}^2}{A_{11}^2} - \frac{A_{222}^2}{A_{112}^2}$	---	---	-4.5026	-0.0452	---	---
$A_{111}^2 A_{122}$	---	---	Posi-	Posi-	---	---
$A_{222}^2 A_{112}$	---	---	tive	tive	---	---
Type of Buckling	Asym.	Asym.	Mono-clinal	Mono-clinal	Stable Sym.	Stable Sym.
Catastrophe	Fold	Fold	Hyperb. Umbilic	Hyperb. Umbilic	Cusp	Cusp

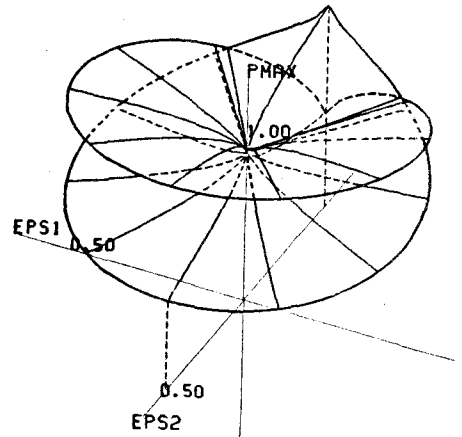


Fig.1 Imperfection-sensitivity for Hyperbolic Umbilic Catastrophe

- 1) 田中・渡辺・森, 多自由度系非線形物のカタストロフィーに関する考察, 第35回工学会年次学術講演会報告集, I-39, 1980.
- 2) Niwa, Y., E. Watanabe and H. Isawi, Catastrophe Analysis of Structures by Discretization and Modal Transforms, Memoirs of the Faculty of Engineering Kyoto University, 43(1), 1981.
- 3) Thompson, J.M.T and G.W. Hunt, Towards a Unified Bifurcation Theory, ZAMP, 26, 1975, pp. 581-603.