

曲げと引張りを受ける直交異方性中等厚板の一理論

大阪市立大学 正員 園田恵一郎

大阪市立大学 正員 堀川都志雄

1 はしがき： 横せん断変形を考慮した中等厚板に関する理論が数多く提案されてきた。等方性板に対しては A.E.H. Love, E. Reissner および A. Kromm らの研究があり、直交異方性板では K. Girkmann, V. Panc および S.A. Ambartsumyan らによるものがあげられる。例えば、K. Girkmann は等方性板の Reissner 理論を異方性板に拡張し、S.A. Ambartsumyan は6階の基礎微分方程式からなるポテンシャル関数を導入することによって解析を行っている。しかしながら、鉛直荷重のみが作用する曲げ問題でも鉛直応力による影響が無視出来ず、引張り問題をも伴うことは3次元理論より明らかであるので、水平および鉛直方向の外荷重が同時に作用する場合にこれはこれまでのいずれの理論も十分であるとは言いがたい。本研究では S.A. Ambartsumyan の理論を任意方向の外荷重下でも取扱える様に拡張する為に、曲げ問題に関して3つまた引張り問題で2つのそれぞれ独立なポテンシャル関数を誘導する。さらに、等方性の Reissner 理論および2次元問題での Galerkin vector との関連性を検討することによって、これらのポテンシャル関数の性質を明らかにする。

2 理論式： 直交異方性体の弾性係数を C_{ij}

とする。応力と変位の関係は、

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_{11} \partial_x u + a_{12} \partial_y v + a_{13} \sigma_z, & \tau_{xy} &= C_{44} (\partial_y u + \partial_x v), \\ \sigma_y &= a_{12} \partial_x u + a_{22} \partial_y v + a_{23} \sigma_z, & \tau_{yz} &= C_{55} (\partial_x w + \partial_z u), \\ \tau_{yz} &= C_{66} (\partial_z v + \partial_y w) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{ここで、} a_{11} = C_{11} - C_{13}^2/C_{33}, \quad a_{12} = C_{12} - C_{13}C_{23}/C_{33}, \\ a_{22} = C_{22} - C_{23}^2/C_{33}, \quad \partial_x = \partial/\partial x, \quad \partial_y = \partial/\partial y, \quad \partial_z = \partial/\partial z.$$

・断面力のつりあい式 (図-1 参照)

i) 曲げ問題

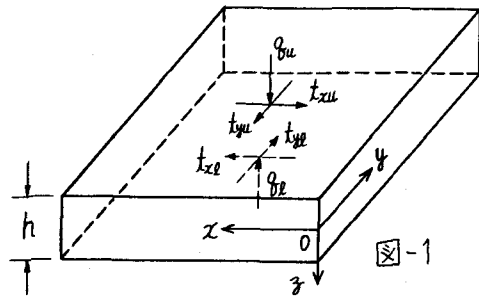
$$\begin{aligned} \partial_x M_x + \partial_y M_{xy} - Q_x + \frac{h}{2} t_{xp} &= 0, \\ \partial_x M_{xy} + \partial_y M_y - Q_y + \frac{h}{2} t_{yp} &= 0, \\ \partial_x Q_x + \partial_y Q_y - g_m &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ii) 引張り問題

$$\begin{aligned} \partial_x N_x + \partial_y N_{xy} + t_{xm} &= 0, \\ \partial_x N_{xy} + \partial_y N_y + t_{ym} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{ここで、} t_{xp} = t_{xe} + t_{xu}, \quad t_{yp} = t_{ye} + t_{yu}, \quad g_p = g_e + g_u, \\ t_{xm} = t_{xe} - t_{xu}, \quad t_{ym} = t_{ye} - t_{yu}, \quad g_m = g_e - g_u, \\ T_p = \partial_x t_{xp} + \partial_y t_{yp}, \quad T_m = \partial_x t_{xm} + \partial_y t_{ym}$$

・断面力とたわみ w , せん断力 Q_x および Q_y との関係式



i) 曲げ問題

$$\begin{aligned} M_x &= -(\bar{D}_{11} \partial_x^2 + \bar{D}_{12} \partial_y^2) w + E_{11} \partial_x Q_x + E_{12} \partial_y Q_y \\ &\quad - \frac{h}{12} (E_{11} \partial_x t_{xp} + E_{12} \partial_y t_{yp}) - F_{33} (g_m - \frac{h}{12} T_p), \\ M_y &= -(\bar{D}_{12} \partial_x^2 + \bar{D}_{22} \partial_y^2) w + E_{12} \partial_x Q_x + E_{22} \partial_y Q_y \\ &\quad - \frac{h}{12} (E_{12} \partial_x t_{xp} + E_{22} \partial_y t_{yp}) - F_{33} (g_m - \frac{h}{12} T_p), \\ M_{xy} &= -2\bar{D}_{12} \partial_x \partial_y w + E_{23} \partial_y Q_x + E_{23} \partial_x Q_y \\ &\quad - \frac{h}{12} (E_{23} \partial_y t_{xp} + E_{23} \partial_x t_{yp}) \end{aligned} \quad (4)$$

ii) 引張り問題

$$\begin{aligned} N_x &= G_{11} \partial_x u_0 + G_{12} \partial_y v_0 + H_{11} \partial_x t_{xm} + H_{12} \partial_y t_{ym} + H_{13} (-g_p + \frac{h}{2} T_m), \\ N_y &= G_{12} \partial_x u_0 + G_{22} \partial_y v_0 + H_{12} \partial_x t_{xm} + H_{22} \partial_y t_{ym} + H_{23} (-g_p + \frac{h}{2} T_m), \\ N_{xy} &= G_{21} (\partial_y u_0 + \partial_x v_0) + H_{44} \partial_y t_{xm} + H_{44} \partial_x t_{ym} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 u_0 および v_0 は板中央面での x および y 方向の水平変位

式(4)および(5)を式(2)および(3)に代入して次式を得る。上添字0は直交異方性体を示す。

i) 曲げ問題

$$\begin{aligned} [D_{11}\partial_x^2 + D_{12}\partial_x\partial_y]W - [E_{12} + E_{23}\partial_y^2 - 1]Q_x - (E_{12}' + E_{23}')\partial_x\partial_y Q_y &= X_1^0, \\ [D_{12}\partial_x\partial_y + D_{22}\partial_y^2]W - (E_{12} + E_{23})\partial_x\partial_y Q_x - [E_{23}'\partial_x^2 + E_{22}\partial_y^2 - 1]Q_y &= X_2^0, \\ \partial_x Q_x + \partial_y Q_y &= X_3^0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \therefore X_1^0 &= \frac{h}{2}t_{xp} - \frac{h}{12}(E_{11}\partial_x^2 + E_{23}\partial_y^2)t_{xp} - \frac{h}{12}(E_{12}' + E_{23}')\partial_x\partial_y t_{yp} - F_{33}(\delta_m - \frac{h}{12}Tp), \\ X_2^0 &= \frac{h}{2}t_{yp} - \frac{h}{12}(E_{12} + E_{23})\partial_x\partial_y t_{xp} - \frac{h}{12}(E_{23}'\partial_x^2 + E_{22}\partial_y^2)t_{yp} - F_{33}\partial_y(\delta_m - \frac{h}{12}Tp), \\ X_3^0 &= \delta_m \end{aligned}$$

ii) 引張り問題

$$\begin{aligned} (G_{11}\partial_x^2 + G_{21}\partial_y^2)U_0 + (G_{12} + G_{21})\partial_x\partial_y U_0 &= -Y_1^0, \\ (G_{12} + G_{21})\partial_x\partial_y U_0 + (G_{21}\partial_x^2 + G_{22}\partial_y^2)U_0 &= -Y_2^0 \quad (7) \\ \therefore Y_1^0 &= t_{xm} + (H_{11}\partial_x^2 + H_{44}\partial_y^2)t_{xm} \\ &\quad + (H_{12} + H_{44})\partial_x\partial_y t_{ym} - H_{13}\partial_x(\delta_p - \frac{h}{8}T_m), \\ Y_2^0 &= t_{ym} + (H_{12} + H_{44})\partial_x\partial_y t_{xm} \\ &\quad + (H_{44}\partial_x^2 + H_{22}\partial_y^2)t_{ym} - H_{23}\partial_y(\delta_p - \frac{h}{8}T_m) \end{aligned}$$

ポテンシャル関数の基礎式 曲げおよび引張り問題のポテンシャル関数をそれぞれ Φ^0 および Ψ^0 とすると、

$$\begin{aligned} [D_{11}\partial_x^2 + 2D_{12}\partial_x\partial_y + D_{22}\partial_y^2 \\ - D_{11}E_{23}\partial_x^2 + \{D_{11}(E_{22} - E_{12} - E_{23}) + D_{12}(E_{11} - E_{12}')\}\partial_x\partial_y - \{D_{12}(E_{22} - E_{12}) + D_{22}(E_{11} - E_{12}' - E_{23})\}\partial_x\partial_y^2 - D_{22}E_{23}\partial_y^2] \Phi^0 &= -X^0 \quad (8) \\ [G_{11}G_{21}\partial_x^2 + (G_{11}G_{22} - 2G_{12}G_{21} - G_{12}')\partial_x\partial_y - G_{21}G_{22}\partial_y^2] \Psi^0 &= -Y^0 \quad (9) \end{aligned}$$

$\therefore X^0 = X_1^0\hat{i} + X_2^0\hat{j} + X_3^0\hat{k}$, $\Psi^0 = \Psi_1^0\hat{i} + \Psi_2^0\hat{j}$, $Y^0 = Y_1^0\hat{i} + Y_2^0\hat{j}$.

ポテンシャル関数と変位およびせん断力との関係式

$$\begin{aligned} W &= \partial_x [E_{23}'\partial_x^2 + (E_{22} - E_{12} - E_{23})\partial_y^2 - 1]\Phi_1^0 + \partial_y [(E_{11} - E_{12}' - E_{23}')\partial_x^2 + E_{23}\partial_y^2 - 1]\Phi_2^0 \\ &\quad + [E_{11}E_{23}'\partial_x^2 + \{E_{11}E_{22} + E_{23}E_{23}' - (E_{12} + E_{23})(E_{12}' + E_{23}')\}\partial_x\partial_y^2 + E_{22}E_{23}\partial_y^2 - (E_{11} + E_{23}')\partial_x^2 - (E_{22} + E_{23})\partial_y^2 + 1]\Phi_3^0, \\ Q_x &= -\partial_y^2 [D_{12}\partial_x^2 + D_{22}\partial_y^2]\Phi_1^0 + \partial_x\partial_y [D_{11}\partial_x^2 + D_{12}\partial_y^2]\Phi_2^0 \\ &\quad + \partial_x [D_{11}E_{23}'\partial_x^2 + (D_{11}E_{22} - D_{12}E_{12}')\partial_x\partial_y^2 + \{D_{12}E_{22} - D_{22}(E_{12}' + E_{23}')\}\partial_y^2 - (D_{11}\partial_x^2 + D_{12}\partial_y^2)]\Phi_3^0, \\ Q_y &= \partial_x\partial_y [D_{12}\partial_x^2 + D_{22}\partial_y^2]\Phi_1^0 - \partial_x^2 [D_{11}\partial_x^2 + D_{12}\partial_y^2]\Phi_2^0 \\ &\quad + \partial_y [\{D_{22}E_{11} - D_{11}(E_{12} + E_{23})\}\partial_x^2 + (D_{22}E_{11} - D_{12}E_{12}')\partial_x\partial_y^2 + D_{22}E_{23}\partial_y^2 - (D_{12}\partial_x^2 + D_{22}\partial_y^2)]\Phi_3^0 \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_0 &= (G_{21}\partial_x^2 + G_{22}\partial_y^2)\Psi_1^0 - (G_{12} + G_{21})\partial_x\partial_y \Psi_2^0, \\ V_0 &= -(G_{12} + G_{21})\partial_x\partial_y \Psi_1^0 + (G_{11}\partial_x^2 + G_{21}\partial_y^2)\Psi_2^0 \quad (11) \end{aligned}$$

<等方性板との比較> 上添字Iは等方性体を示す。 $(\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2, \nu; \text{ポアソン比})$

i) 曲げ問題

式(8)および(10)は、次のようになる。

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta(1 - \frac{h}{10}\Delta)\Phi^I &= -X^I \quad (12) \\ W &= (\frac{h}{10} - 1)\{\partial_x\Phi_1^I + \partial_y\Phi_2^I + [\frac{h}{5} \frac{1}{1-\nu}\Delta - 1]\Phi_3^I\}, \\ Q_x &= -D\Delta\{\partial_y^2\Phi_1^I - \partial_x\partial_y\Phi_2^I - \partial_x(\frac{h}{10}\Delta - 1)\Phi_3^I\}, \\ Q_y &= -D\Delta\{-\partial_x\partial_y\Phi_1^I + \partial_x^2\Phi_2^I - \partial_y(\frac{h}{10}\Delta - 1)\Phi_3^I\} \quad (13) \end{aligned}$$

式(12)と(13)より、微分演算子 $(\frac{h}{10}\Delta - 1)$ が共通であるので、式(14)は

$$\begin{aligned} W &= (\frac{h}{10}\Delta - 1)\{\partial_x\Phi_1^I + \partial_y\Phi_2^I\} - (\frac{h}{5} \frac{1}{1-\nu}\Delta - 1)\Phi_3^I, \\ Q_x &= -D\Delta\{\partial_y^2\Phi_1^I - \partial_x\partial_y\Phi_2^I\} - D\partial_x\Delta\Phi_3^I + \partial_y\Phi_4^I, \\ Q_y &= -D\Delta\{-\partial_x\partial_y\Phi_1^I + \partial_x^2\Phi_2^I\} - D\partial_y\Delta\Phi_3^I - \partial_x\Phi_4^I \quad (14) \end{aligned}$$

ii) 引張り問題 (μ ; せん断弾性係数)

式(9)および(11)は、次のようになる。

$$\begin{aligned} (2\mu)^2 \frac{h^2}{2(1-\nu)} \Delta\Delta\Psi^I &= -Y^I \quad (17) \\ U_0 &= (2\mu h) \{ \frac{1}{1-\nu} [\frac{1}{2}\partial_x^2 + \partial_y^2] \Psi_1^I - \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \partial_x\partial_y \Psi_2^I, \end{aligned}$$

ポテンシャルの基礎式は、次のように得られる。

$$D\Delta\Delta\Phi_3^I = -X_3^I = \delta_m, \quad (1 - \frac{h}{10}\Delta)\Phi_4^I = 0 \quad (15)$$

さらに、式(14)に演算子 $D\Delta\Delta$ および $\Delta(\frac{h}{10}\Delta - 1)$ を作用させ

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta W &= D\Delta\Delta(\frac{h}{10}\Delta - 1)\{\partial_x\Phi_1^I + \partial_y\Phi_2^I\} - D\Delta\Delta(\frac{h}{5} \frac{1}{1-\nu}\Delta - 1)\Phi_3^I \\ &= -\delta_m + \frac{h}{10} \frac{2+\nu}{1-\nu} \Delta\delta_m + \frac{h}{5} T_p - \frac{h}{120} \frac{2+\nu}{1-\nu} \Delta T_p, \\ (\frac{h}{10}\Delta - 1)Q_x &= D\partial_x\Delta W - \frac{1}{10} \frac{1}{1-\nu} \partial_x\delta_m - \frac{h}{5} t_{xp} \\ &\quad + \frac{h^2}{120} \frac{2+\nu}{1-\nu} \partial_x^2 t_{xp} + \partial_y t_{yp} + \frac{1}{1-\nu} \partial_x\partial_y t_{yp} \quad (16) \end{aligned}$$

関数 Φ_4^I は、せん断力による応力関数となり、式(16)はE. Reissnerによる式系と一致している。

$$\begin{aligned} V_0 &= (2\mu h) \left\{ -\frac{1+\nu}{2(1-\nu)} \partial_x\partial_y \Psi_1^I + \frac{1}{1-\nu} [\partial_x^2 + \frac{1+\nu}{2}\partial_y^2] \Psi_2^I \right\} \quad (18) \\ \Psi^I &= [(1-\nu)/(\mu/2h)] \Phi \quad \text{とすると、}\Phi \text{は2次元問題の Galerkin} \\ &\quad \text{vector と一致する。} \end{aligned}$$