弾性又は粘弾性基礎上のせん断変形を考慮したはり及び平板の解析

大阪市立大学　正員 ○小林　治俊
〃　　　〃　　園田恵一郎

1 まえがき　弾性基礎上のせん断変形を考慮した,はり，板に対しては若干の研究例がある。[1)] しかし，いずれも基礎微分方程式を直接解いているため，解式が基礎係数を引数に持つ関数表示式となっていて、粘弾性基礎問題へこれを拡張することは困難である。著者らは先にはりや薄板に対し、自由振動問題から得られる固有関数を用いて，まず弾性基礎に対する解式を求め，次に対応原理によってその解式を粘弾性基礎に対する解式へ拡張する方法を示した。[2)] 本文はこの手法を用い，せん断変形を考慮したはり，平板に対する一般解を求めたものである。　はりや平板の古典理論に対し、せん断変形を考慮した修正理論は幾つかあるが，本文ではせん断補正係数を導入するTimoshenko-Mindlin理論を用いている。

2 はりの解析　基礎方程式は次式で表わされる。

$$dM/dx = Q, \quad dQ/dx = kw - g$$

$$M = -EI\,d\psi/dx, \quad Q = \kappa AG\,(dw/dx - \psi) \qquad \text{——(1)}$$

w：たわみ，ψ：曲げによる回転，EI：曲げ剛性，κ：せん断補正係数，A：断面積，G：せん断剛性，k：基礎係数，g：荷重分布。

(1)式より，断面力 M，Q を消去すると，

$$EI\frac{d^2\psi}{dx^2} + \kappa AG\left(\frac{dw}{dx} - \psi\right) = 0$$

$$\kappa AG\left(\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{d\psi}{dx}\right) = kw - g \qquad \text{——(2)}$$

となる。(2)式を w もしくは ψ のみの微分方程式に変形してゆくのがEssenburgの方法[1)]であるが本文ではこの段階で，(2)式の解として次の様な級数を用いる。

$$w(x) = W_R + \sum_{m=1}^{\infty} w_m Y_m(x)$$

$$\psi(x) = \bar{\Psi}_R + \sum_{m=1}^{\infty} w_m \bar{\Psi}_m(x) \qquad \text{——(3)}$$

ここで $Y_m(x)$，$\bar{\Psi}_m(x)$ は回転慣性を考慮しない場合のTimoshenko Beamの自由振動問題に対するたわみ，回転のmode functionで，W_R，$\bar{\Psi}_R$ は，剛体変位項を示す。　例えば，両端($x=\pm l$)自由の場合の対称モードに対する $Y_m(x)$，$\bar{\Psi}_m(x)$ として固有方程式は，

$$Y_m(x) = \frac{\cosh a_m x/l}{\cosh a_m} + \frac{b_m^2}{a_m^2}\frac{\cos b_m x/l}{\cos b_m}$$

$$\bar{\Psi}_m(x) = \frac{b_m^2}{l a_m}\left(\frac{\sinh a_m x/l}{\cosh a_m} - \frac{a_m}{b_m}\frac{\sin b_m x/l}{\cos b_m}\right)$$

$$a_m \tanh a_m + b_m \tan b_m = 0$$

ここで，$(a_m, b_m) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\mp(\delta_m s)^2 + \left[(\delta_m s)^4 + 4\delta_m^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2}$

δ_m = 固有値，$s^2 = EI/\kappa AG l^2$ ——(4)

次に荷重 $g(x)$ を

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m Y_m(x) \qquad \text{——(5)}$$

と表わし，mode functionの直交条件(6)を利用すれば，係数 g_m が(7)式で与えられる。

$$\int_{-l}^{l} Y_m(x) Y_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ N_m & (m = n) \end{cases} \qquad \text{——(6)}$$

$$g_m = \frac{1}{N_m}\int_{-l}^{l} g(x) Y_m(x)\,dx \qquad \text{——(7)}$$

(4)(5)式を(2)式へ代入すれば，(2-1)式は自動的に満たされ，(2-2)式より未定係数 w_m が次定されるので $W(x)$ の一般解は次式となる。

$$w(x) = W_R + \frac{l^4}{EI}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{g_m}{\Delta_m^4 + K^4} Y_m(x) \qquad \text{——(8)}$$

$\Delta_m^4 = \delta_m^2$，$K^4 = kl^4/EI$。$\psi(x)$ は省略。

Harutoshi KOBAYASHI and Keiichiro SONODA

Step荷重 $\mathbf{1}(t)q(x)$に対し、対応原理を適用すれば粘弾性問題の解式が得られる。三要素モデル（図1）の粘弾性基礎に対しては、

$$W(x) = W_R T_1(t) + \frac{l^4}{EI}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q_m T_2(t)}{\Delta_m^4 + K^4} Y_m(x) \qquad (9)$$

$$T_1(t) = 1 - (K_1/K_2)^4 \exp(-t/\tau_c)$$

$$T_2(t) = 1 - (K_1/\Delta_m)^4 T(t) / [1 + (K_2/\Delta_m)^4]$$

$$T(t) = \exp\{-[(K_2/K)^4 + (K_2/\Delta_m)^4] / [1 + (K_2/\Delta_m)^4] t/\tau_c\}$$

$$K_1^4 = k_1 l^4/EI,\quad K_2^4 = K^4 + K_1^4,\quad \tau_c = (1 + k/k_1)\eta/k$$

3 円板の解析

断面力−変位関係式は、

$$M_r = -D\left\{\frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r}\left(\psi_r + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}\right)\right\};\quad M_\theta = -D\left\{\frac{1}{r}\left(\psi_r + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}\right) + \nu\frac{\partial\psi_r}{\partial r}\right\};\quad M_{r\theta} = -\frac{1-\nu}{2}D\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} - \psi_\theta\right) + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r}\right\}$$

$$Q_r = \kappa Gh\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \psi_r\right);\quad Q_\theta = \kappa Gh\left(\frac{\partial W}{r\partial\theta} - \psi_\theta\right) \qquad (10)$$

(10)式をつり合い式に代入して次式を得る。

$$\frac{D}{2}\left\{(1-\nu)\left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)\psi_r - 2\frac{\partial\psi_\theta}{r^2\partial\theta}\right] + (1+\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right\} + \kappa Gh\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \psi_r\right) = 0$$

$$\frac{D}{2}\left\{(1-\nu)\left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2}\right)\psi_\theta + 2\frac{\partial\psi_r}{r^2\partial\theta}\right] + (1+\nu)\frac{\partial\Phi}{r\partial\theta}\right\} + \kappa Gh\left(\frac{\partial W}{r\partial\theta} - \psi_\theta\right) = 0$$

$$\kappa Gh(\nabla^2 W - \Phi) = kW - q \qquad (11)$$

ここで　∇^2 = Laplacian，$\Phi = \partial\psi_r/\partial r + \psi_r/r + \partial\psi_\theta/r\partial\theta$.

はりの場合同様，次の級数を解に採用する。

$$W(r,\theta) = W_R + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} w_{mn} W_{mn}(r,\theta)$$

$$\psi_r(r,\theta) = \Psi_{r,R} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} w_{mn} \Psi_{r,mn}(r,\theta)$$

$$\psi_\theta(r,\theta) = \Psi_{\theta,R} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} w_{mn} \Psi_{\theta,mn}(r,\theta) \qquad (12)$$

ここで $W_{mn}(r,\theta)$, $\Psi_{r,mn}(r,\theta)$, $\Psi_{\theta,mn}(r,\theta)$ は回転慣性を考慮しない場合の Mindlin Plate の自由振動問題に対するたわみ，回転の mode function で，W_R, $\Psi_{r,R}$, $\Psi_{\theta,R}$ は剛体変位項である。W_{mn} などは次式を満足するものである。

$$W_{mn} = W_{1,mn} + W_{2,mn}$$

$$\Psi_{r,mn} = (1-\sigma_1)\partial W_{1,mn}/\partial r + (1-\sigma_2)\partial W_{2,mn}/\partial r + \partial H/r\partial\theta$$

$$\Psi_{\theta,mn} = (1-\sigma_1)\partial W_{1,mn}/r\partial\theta + (1-\sigma_2)\partial W_{2,mn}/r\partial\theta - \partial H/\partial r$$

$$(\nabla^2 + \delta_1^2)W_{1,mn} = 0,\quad (\nabla^2 - \delta_2^2)W_{2,mn} = 0$$

$$(\nabla^2 - \omega^2)H = 0 \qquad (13)$$

ここで，$(\delta_1^2, \delta_2^2) = \delta_0^4/2\left(\pm S + [S^2 + 4\delta_0^{-4}]^{\frac{1}{2}}\right)$

$(\sigma_1, \sigma_2) = S(\delta_2^2, -\delta_1^2)$，$\omega^2 = 2/[S(1-\nu)]$

$S = D/\kappa Gh$，δ_0 = 固有値

例えば周辺自由で軸対称の場合の W_1, W_2 などは，

$$W_1 = J_0(\delta_1 r),\quad W_2 = -[\beta_2 J_1(\beta_1)/\beta_1 I_1(\beta_2)] I_0(\delta_2 r)$$

$$(\sigma_1-1)\beta_1 J_0(\beta_1)/J_1(\beta_1) - (\sigma_1/\sigma_2)(\sigma_2-1)\beta_2 I_0(\beta_2)/I_1(\beta_2) + (1-\nu)(1-\sigma_1/\sigma_2) = 0$$

$$\beta_1 = \delta_1 a,\quad \beta_2 = \delta_2 a,\quad a = \text{半径} \qquad (14)$$

mode function の直交性を利用すると，はりの場合と同じ手法で解式が求まる。たわみは，

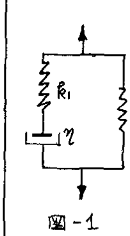
$$W(r,\theta) = W_R + \frac{a^4}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_{mn}}{(\delta_0 a)^4 + K^4} W_{mn}(r,\theta) \qquad (15)$$

上式は，粘弾性解へ容易に拡張出来，矩形板についても，ここで述べた方法で解式を求め得る。

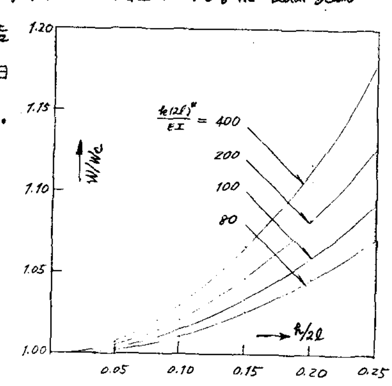
4 数値計算例

中央集中荷重を受ける弾性基礎上のはりの載荷点下のたわみの (W/W_c)−$(h/2l)$ 曲線を $k(2l)^4/EI$ の変化と共に示したのが図2である。W_c = Eular Beam

h−はり高．他の結果については当日発表の予定である。



図−1



図−2

5 参考文献

1) F.Essenburg : Shear Deformation in Beam on Elastic Foundation, JAM, Vol.29, 1966, pp.313-317.

D.Frederick : On Some Problems in Bending of Thick Circular Plates on an Elastic Foundation, JAM, Vol.19, 1956, pp.195-200.

V.Panc : Theories of Elastic Plates, Noordhoff, 1975, Part IV, pp.581-704.

2) 園田 他 ： 線形粘弾性基礎上のはりの解析，土木論文集，No.247.

K.Sonoda et al : Circular Plates on Linear Visco-elastic Foundations, ASCE, EMD, Vol.104,1978.

K.Sonoda et al : Rectangular Plates on Linear Visco-elastic Foundations, ASCE, EMD, Vol.106,1980.

3) E.B.Magrab : Vibrations of Elastic Structural Members, Noordhoff, 1979, Ch.V and Ch.VII.