積分方程式法による不均一物体の動的解析に関する考察

京都大学工学部　正員　小林昭一
京都大学工学部　正員　○西村直志

1　序

積分方程式法を用いて図1に示す様な不均一弾性体の定常動弾性問題を解析する事を考える．ここで簡単のため，物体はD_e, D_iの2相に分かれるとし，それぞれが常数（$\lambda_{e(i)}, \mu_{e(i)}, \rho_{e(i)}$）を有する等方線型弾性体とする．$D_e$は外部領域であり，境界条件は$S_o$上で与える．このとき，$D_{e(i)}$内での変位場を$e^{-i\omega t}$を省略して

$$u(x)=\int_S T_e(x,y)u(y)dS-\int_S U_e(x,y)t(y)dS+u_I(x),\quad x\in D_e \qquad (1)$$

$$u(x)=\int_S U_i(x,y)t(y)dS-\int_S T_i(x,y)u(y)dS+\int_{S_o} T_i(x,y)v(y)dS-\int_S U_i(x,y)s(y)dS,\quad x\in D_i \qquad (2)$$

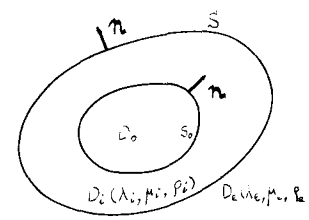

図1

と表示する．ここに$U_{e(i)}$, $T_{e(i)}$は$D_{e(i)}$の一重層，二重層の核であり，u，t（v，s）はS（S_o）上での変位，表面力である．またu_Iは，入射波である．これらより，次の積分方程式が得られる．

$$0=C_e^i u(x)+\int_S T_e(x,y)u(y)dS-\int_S U_e(x,y)t(y)dS+u_I(x)\qquad x\in S, \qquad (3)$$

$$0=\int_S U_i(x,y)t(y)dS-C_i^e u(x)-\int_S T_i(x,y)u(y)dS+\int_{S_o} T_i(x,y)v(y)dS-\int_{S_o} U_i(x,y)s(y)dS\quad x\in S, \qquad (4)$$

$$0=\int_S U_i(x,y)t(y)dS-\int_S T_i(x,y)u(y)dS+C_i^i v(x)+\int_{S_o} T_i(x,y)v(y)dS-\int_{S_o} U_i(x,y)s(y)dS\quad x\in S_o, \qquad (5)$$

ここにC_e^i等は二重層$\int_S T_e u\,dS$の内部極限のFree term等である．u_I，およびS_o上での境界条件から得られた積分方程式は，一般に一意解を有しない．本報文の目的は，いかなるFrequency ωで，この様な非一意性が生ずるかを示す事である．

2　見かけ上の固有値

$S_o=S_o^1+S_o^2$とし，$S_o^{1(2)}$上でv（s）が与えられたものとする．このとき，積分方程式(3)（(4),(5)）は，式(1)（(2)）の右辺のポテンシアル表示が$D_{e(i)}^c$（cは補集合の意）上の関数とみて，境界S（$S\cup S_o$）上で0になる事を示している．ポテンシアル表示(1)((2))が求める解になる必要十分条件は，これが$D_{e(i)}^c$で0になる事であるから，明らかに

［1］　積分方程式(3)～(5)に対応する斉次方程式が非自明解を有するとすれば，それはωが$D_e^c(\lambda_e,\mu_e,\rho_e)$，又は$D_o(\lambda_i,\mu_i,\rho_i)$の変位境界値問題の固有値と一致する場合に限る．

Shoichi KOBAYASHI & Naoshi NISHIMURA

ここに$D_e^c(\lambda_e, \mu_e, \rho_e)$等は，領域$D_e^c$を占める，常数$(\lambda_e, \mu_e, \rho_e)$を有する弾性体等を意味する．

これらのωに対応して，確かに非自明解が存在する．実際，

［II］　次の解は，積分方程式(3)〜(5)に対応する斉次方程式の非自明解である．

$$u = u_e^+ - f_e^- = u_i^- + f_i \ , \quad t = \overset{n}{T}_e u_e^+ - \overset{n}{T}_e f_e^- = \overset{n}{T}_i u_i^- + \overset{n}{T}_i f_i \quad \text{on } S$$
$$v = u_i^+ \quad \text{on } S_0^1 \ , \quad s = \overset{n}{T}_i u_i^+ \quad \text{on } S_0^2 \tag{6}$$

ここに$u_{e(i)}$は，$D_e(\lambda_e, \mu_e, \rho_e)$　$(D_i(\lambda_i, \mu_i, \rho_i))$　に於ける変位場で，次の条件を満たす：

$$u_e^+ - u_i^- = f_e^- + f_i = f_i \ , \quad \overset{n}{T}_e u_e^+ - \overset{n}{T}_i u_i^- = \overset{n}{T}_e f_e^- + \overset{n}{T}_i f_i \quad \text{on } S$$
$$u_i^+ = 0 \quad \text{on } S_0^1 \ , \quad \overset{n}{T}_i u_i^+ = 0 \quad \text{on } S_0^2 . \tag{7}$$

なお，$\overset{n}{T}_{e(i)}$は，常数$(\lambda_{e(i)}, \mu_{e(i)})$による表面力作用素，$\pm$は外部(+)，及び内部(−)極限を示す．また，$f_i$，$f_e$は各々$D_0^c(\lambda_i, \mu_i, \rho_i)$，$D_e^c(\lambda_e, \mu_e, \rho_e)$の変位場であって，$\omega$の値によって次の様に選ぶ：

(i)　ωが$D_e^c(\lambda_e, \mu_e, \rho_e)$の固有値の場合

　$f_i = 0$，$f_e =$（ある0でない$D_e^c(\lambda_e, \mu_e, \rho_e)$の斉次変位境界値問題の解）

(ii)　ωが$D_0(\lambda_i, \mu_i, \rho_i)$の固有値の場合

　$f_i = u_i^0$，$f_e = 0$，ただしu_i^0は$D_0^c(\lambda_i, \mu_i, \rho_i)$の変位場であり，ある$D_0(\lambda_i, \mu_i, \rho_i)$の変位境界値問題の固有関数$u^*$を用いて，境界条件

$$u_i^{0+} = 0 \quad \text{on } S_0^1 \ , \quad \overset{n}{T}_i u_i^{0+} = \overset{n}{T}_i u^{*-} \quad \text{on } S_0^2$$

を満たすものである．

(iii)　ωが(i)，(ii)のいずれにも属する場合

　f_iは(ii)の様に，f_eは(i)の様にとる．

特に，$\lambda_e = \lambda_i = \lambda$，$\mu_e = \mu_i = \mu$，$\rho_e = \rho_i = \rho$の場合，問題は一相の弾性体の境界値問題となるが，一相の弾性体のGreen公式から得られる積分方程式と，(3)〜(5)は等価でない．実際，(3)〜(5)は［II］(i)で示したωに対しても解の一意性が成立たないからである．

本節で述べた様な「見かけ上の固有値」は，一切物理的な意義を有せず，数値解析に於いては精度の悪化要因であるから注意せねばならない．

3　数値解析上の対策

一相の弾性体，又は音響媒質に於いて，この様な不都合を除く方法はいくつか知られている[1)]が，数値的には必ずしも十分でなく，この様な周波数に対する解析はできるだけ回避するのが妥当であろう．そのためには，ある周波数が見かけ上の固有値であるかどうかを判定する数値的手法が必要である．従来から行なわれている手法としては，得られた行列の行列式を評価する方法があるが，局所的に見かけ上の固有値を検出するのには不適当である．そこで，行列のLU分解を行なった後の対角項（Crout法であればLの対角項）に注目し，その最小値でこの判定を行なう手法を開発した．詳細は，紙面の都合で当日発表する．

1) Shaw, R.P.; Chapt. 6 in "Developments in Boundary Element Methods - 1" (Ed. P.K. Banerjee & R. Butterfield), Appl. sci. pub., 1978.