

積分方程式法によるシェルの解析

京都大学工学部 正員 丹羽 義次
 京都大学工学部 正員 北原 道弘
 日本道路公団 正員 ○中村 雅彦

1. はじめに

本研究は、薄板およびシェルの解析に、積分方程式法を適用する試みの一環として、薄い偏平殻の理論にもとづいて、開孔を有する円筒殻の応力集中問題を積分方程式法で定式化し、数値解析を行なったものである。なお、離散化において、未知量および積分核を同期3次Bスプライン関数で近似し、精度の向上および計算時間の短縮をはかった。

2. 基礎方程式と境界条件

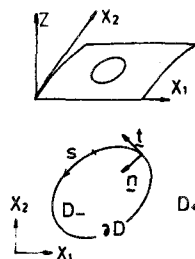
薄い偏平殻の理論によると、物体力、表面力が作用しない場合の円筒殻の基礎式は、図1のような直交直線座標を採用すると、次のように書ける。(ただし無次元化を行なっている。)

$$\mathbb{L}u \equiv \Delta \Delta u - 8i \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0 \quad (1) \quad \left[\begin{array}{l} u = \phi + i w, \phi; \text{Airyの応力関数}, w; \text{面外変位} \\ i = \sqrt{-1}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}; \text{Laplacian} \end{array} \right]$$

また、本問題の基本解の定義と基本解は次の通りである。

$$\mathbb{L}G(X, Y) = -\delta(X, Y) \quad (2) \quad \left[\begin{array}{l} X = X(X_1, X_2), Y = Y(Y_1, Y_2) \\ \delta(X, Y); \text{Diracのデルタ関数} \end{array} \right]$$

$$G(X, Y) = \frac{1-i}{8\pi} \int_0^{\eta} \sinh((1+i)z) K_0((1+i)\sqrt{z^2 + \eta^2}) dz + \frac{\eta}{4\pi} \int_0^{\eta} K_0((1+i)|z|) dz \\ + \frac{1-i}{8\pi} |n| K_1((1+i)|\eta|) \quad (3)$$



$$\left[K_n; n\text{次の変形ベッセル関数}, \eta_a = X_a - Y_a \right]$$

図1 座標、領域、単位ベクトル

開孔部の自由境界条件は、応力関数 ϕ および面外変位 w により次のように表わされる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial n \partial t} = 0, \quad \Delta w - (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial n} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} \right) = 0 \quad (4)$$

3. 積分方程式法による開孔問題の定式化

母線方向(X_1 方向)の無限遠で、外力(たとえば引張力)を受ける円筒殻を考える。説明の都合上、開孔前の諸量は右肩に0を付し、開孔後の諸量は何も付さずに表示。さらに、開孔後と開孔前の差は右肩に Δ を付して示す。また、図1に示すように、開孔の境界を ∂D 、内部を D_- 、外部を D_+ とする。

u^0 はシェル全領域($D_- \cup \partial D \cup D_+$)で、 u^d は開孔の外部領域(D_+)で(1)式を満足することを考慮し、 u^d に対してGreenの外部表現、 u^0 に対しては内部場(D_-)の外部表現を用いることにより、次式を得る。

$$u^d(x) = \int_{\partial D} \underline{h}^d \cdot \underline{n} d\sigma_y \quad x \in D_+ \quad (5), \quad 0 = - \int_{\partial D} \underline{h}^0 \cdot \underline{n} d\sigma_y \quad x \in D_+ \quad (6)$$

(5)、(6)式より、本問題の解 u の積分表示は次式で表わされる。

$$u(x) = u^0(x) + u^d(x) = u^0(x) + \int_{\partial D} \tilde{h}^d \cdot \tilde{n} dA_y + \int_{\partial D} \tilde{h}^0 \cdot \tilde{n} dA_y = u^0(x) + \int_{\partial D} \tilde{h} \cdot \tilde{n} dA_y \quad x \in D^+ \quad (7)$$

(5)、(6)、(7)式において、 $\tilde{h}^*$ は次式で定義されるようなベクトルである。($u^* = u^0$ on u on u^d)

$$\tilde{h}^* = G \nabla (\Delta u^*) - (\Delta u^*) \nabla G + (\Delta G) \nabla u^* - u^* \nabla (\Delta G) - 8i \left(G \frac{\partial u^*}{\partial x_1} - u^* \frac{\partial G}{\partial x_1} \right) e_1 \quad (8)$$

$$\left[e_{x_i}; x_i \text{ 方向の単位ベクトル}, \nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2}; n_{abla} \right]$$

ここで境界条件(4)式を考慮することにより、次の境界積分方程式系が構成できる。

$$F_l^0(x) = a_l F_2(x) - \int_{\partial D} \sum_{n=1}^4 K_{ln}(x, y) F_n(y) dA_y \quad x \in \partial D \quad (l=1, 2, 3, 4) \quad (9)$$

$$\left[\begin{aligned} F_1^0 &= \partial^2 \phi / \partial t^2, \quad F_2^0 = \Delta \phi^0, \quad F_3^0 = \partial w / \partial n, \quad F_4^0 = \partial w / \partial t, \\ F_1 &= \partial \Delta \phi / \partial n, \quad F_2 = \Delta \phi, \quad F_3 = \partial w / \partial n, \quad F_4 = \partial w / \partial t, \quad K_{ln}(x, y); \text{積分核 (省略)} \end{aligned} \right]$$

本問題は、(9)式および次式で表わされる ∂D 連結領域における適合条件式を満足する F_l を求めることに帰着する。

$$\int_{\partial D} (F_1 + 8n_1^2 F_3 + 8n_1 t_1 F_4) dA_y = 0, \quad \int_{\partial D} (y_2 F_1 - n_2 F_2 + 8y_2 n_1^2 F_3 + 8y_2 n_1 t_1 F_4) dA_y = 0 \quad (10)$$

$$\int_{\partial D} (y_1 F_1 - n_1 F_2 + 8y_1 n_1^2 F_3 + 8(y_1 n_1 t_1 - y_2) F_4) dA_y = 0 \quad \left[\begin{aligned} t_a; & \text{単位接線ベクトル } t \text{ の } a \text{ 成分} \\ n_a; & \text{単位法線ベクトル } n \text{ の } a \text{ 成分} \end{aligned} \right]$$

4. 数値解析

離散化に用いた周期3次Bスプライン関数および、離散化の手順は当日報告させていただく。ここでは、引張力を受ける場合について、円孔(図2)、楕円孔(図3)の膜応力および曲げ応力を示す。円孔の場合において、Van Dykeの級数解¹⁾と良く一致していることがわかる。なお、計算時間についても、Gauss積分と比較した結果、スプラインの使用の有効性が確かめられている。

参考文献 1) Van Dyke, P.; Stresses about a circular hole in a cylindrical shell, AIAA Journal, vol. 3, pp. 1733-1742, 1965.

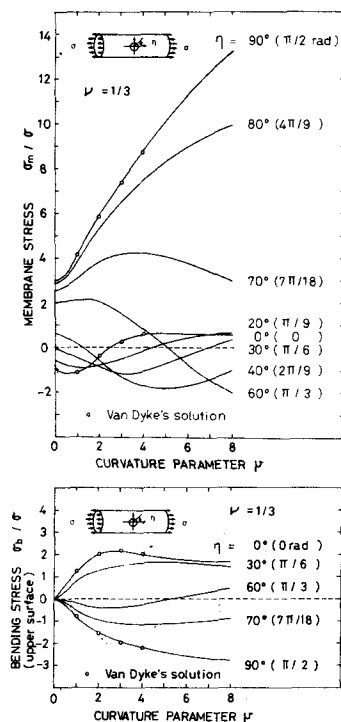


図2 曲率パラメータによる応力の変化

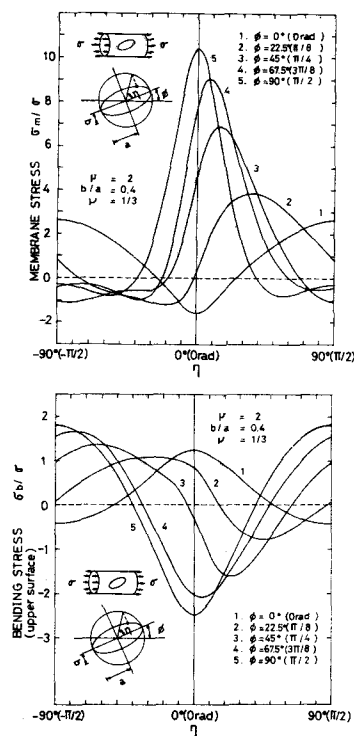


図3 孔の周上の応力分布