積分方程式法の解析精度
——特異境界点付近での精度の向上について——

福井大学　工学部　正員　　福井卓雄
首都高速道路公団　正員　○徳村秀二

1．まえがき

本研究は，断面一様な棒のねじり問題に積分方程式法を適用した場合における，境界近傍，特に特異境界点近傍での数値解の精度について，論じるものである。

2．積分方程式法による数値解

棒の軸方向にz軸，断面内にx-y軸を定める。断面一様な棒の弾性ねじり問題は，断面内で，応力関数ψ（ $\tau_{xz}=\frac{\partial\psi}{\partial y}$，$\tau_{yz}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$ ）により定義され，Gをせん断弾性係数，αを単位ねじり角とするとき，次のような境界値問題となる。

領域内部（B）　　$\nabla^2\psi=-2G\alpha$

境界上（on ∂B）　　$\psi=0$　　　（ ∇：Laplacian ）

応力関数は，基本特異解を　$g(p,q)=\frac{1}{2\pi}\log|p-q|$　（ p: field point，q: boundary point ）とする一重層ポテンシャルにより与えると，

$$\psi(p)=-\frac{1}{2}G\alpha r^2+\int_{\partial B}g(p,q)\sigma(q)dq \qquad (\ \sigma(q)：一重層密度\ )$$

となる。同時に応力τ_{xz}, τ_{yz}も決まる。境界条件を与える方程式はフレドホルム型の第一種積分方程式であり，これから境界上の密度$\sigma(q)$が定まり，さらに応力関数，応力が決定される。数値解析では，境界を有限個の境界要素∂B_jに分割し，要素の中の1点で境界条件を満足させるという選点法を用いる。境界要素上の密度は，区間で一定とする近似と，線形にする近似の2種類について考える。図1，図2に正三角形断面の棒の数値解を図示する。（ G=1.0，α=0.1，辺長l=0.5 の場合の結果で，このとき特異境界点の解析値は図からはみ出ている。）

3．特異境界点近傍での解の精度向上に関する考察

正三角形断面棒に対する数値解析結果からわかるように，断面の隅角部付近では数値解の精度は著しく悪い。また，この結果を密度の近似との関係について見てみると，一般には近似の精度が高いと考えられる区間線形近似の場合の数値解の方が，区間一定近似の場合の数値解よりも，精度が劣っている。この原因は，区間を線形に近似する場合には，特異境界点で境界条件を満足させているために，隅角部での特異性の効果が領域内部に持ちこまれることにあると考えられる。

上の数値解で現われたような隅角部での特異性を緩和する方法について考える。このような特異性発生の原因は，隅角部では境界要素が互いに角度をもって連なっており，隅角部に隣接する要素の端の点では，一重層ポテンシャルの傾きが無限大となっていることにあると考えられる。そこで，数値解析上，つぎの工夫を加える。

・基本方針　：　現在特異境界点となっている隅角部を要素中点となるように，隅角部での

Takuo FUKUI　and　Shūji TOKUMURA

境界要素を領域外に延長する。これによって，各隅角部に1つづつ未知数が増えるので，付加条件として，隅角部が実際の境界として持つべき条件を与える。（図3参照）

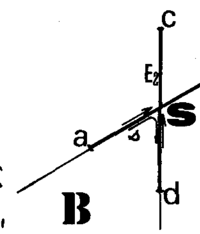

図3

・付加条件：隅角部での応力関数の勾配の平均値を零とおく。即ち，S点において，a→S方向，b→S方向の関数Φの傾きの差が特解のS点での傾きの差に等しいとする。これらの値を隅角部のE_1，E_2要素の密度だけから決めることにすると，与えるべき条件は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial s_{E_1}}\left(\phi_{E_1}+\phi_{E_2}\right)+\frac{\partial}{\partial s_{E_2}}\left(\phi_{E_1}+\phi_{E_2}\right)=-\frac{1}{2}G\alpha\left(\frac{\partial}{\partial s_{E_1}}+\frac{\partial}{\partial s_{E_2}}\right)r_s^2$$

上の操作を付け加えた場合の数値解析結果を図4，図5に示す。特異境界点近傍の数値解の精度は著しく向上し，それに伴って領域内部での解の精度も向上している。また，この場合には，密度を区間で線形に近似した方が，区間で一定とする近似を用いるより，精度が良くなっていることもわかる。（内向きの隅角部については当日発表の予定）

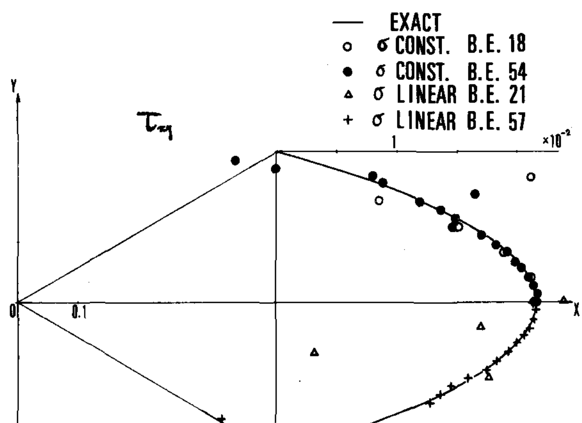

図1

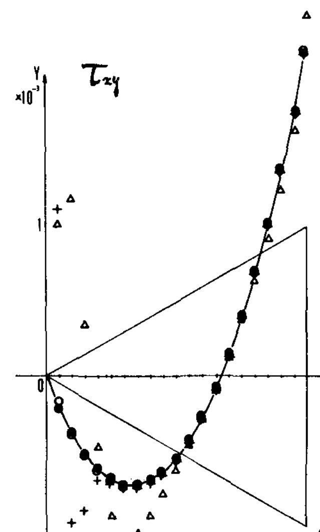

図2

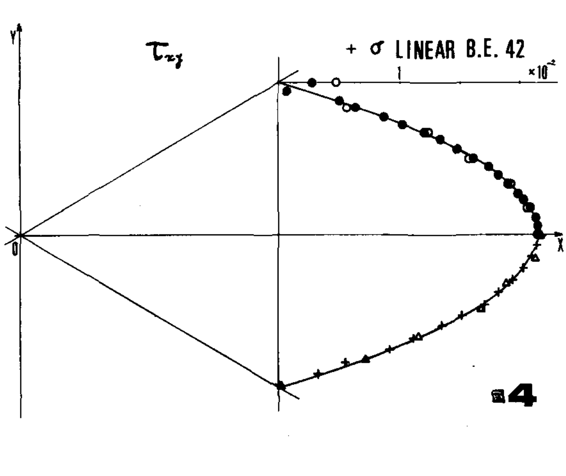

図4

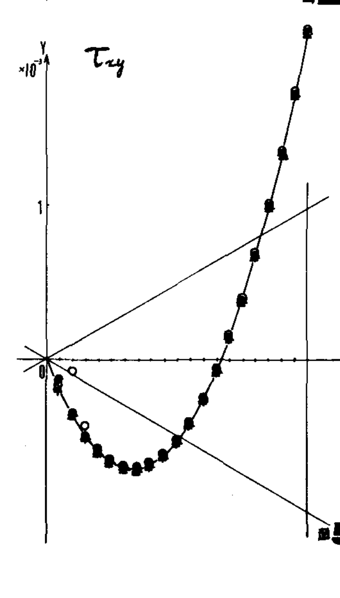

図5