

高次形状関数を用いた境界要素の精度について

大阪大学工学部 正 員 小松定夫
 川崎重工業 正 員 長井正嗣
 大阪大学大学院 学生員 ○坂本保寿

1. まえがき

近年、領域型の問題に対して境界要素法が注目されるようになった。境界要素法は、境界での未知量を近似的に満足する手法であることから、境界の形状および未知力学量に対して高次関数等をして、その近似度の精度を向上することが期待できる。さて、境界形状および境界未知量に高次関数近似を導入すると、それに伴ういくつかの問題が生じ、これらを解決しておくことは本法の適用性を拡充する上でも重要と考える。そこで本文では、この種の問題点について言及し、その処理法を示し、あわせて数値計算例により、その妥当性を検討する。

2. 基礎理論

本法の基礎式は以下の様に見える。(容積力は無視する。)

$$C_{ij} u_j + \int_S P_i^* u_j ds = \int_S U_i^* P_j ds \quad \text{--- (1)}$$

ここで、 u_j , P_j は変位および応力(トラクション)。 U_i^* , P_i^* は基本解。

C_{ij} は特異積分に関する係数である。また、 $\int_S ds$ は表面積分を意味する。

2次元問題において、変位、応力(トラクション)および基本解は以下のように定義される。

$$\begin{cases} U = \{u_1, u_2\}^T \\ P = \{P_1, P_2\}^T \end{cases} \quad U^* = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \quad P^* = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad \text{--- (2)}_{1,2}$$

(2)式を(1)式に代入すると

$$CU + \int_S P^* U ds = \int_S U^* P ds \quad \text{--- (3)}$$

さて、境界を N の領域に分割し、 $U = \Phi U^n$, $P = \Psi P^n$ と定義する。ここで、 Φ , Ψ は補間関数で、 U^n , P^n は節点および応力ベクトルである。これらを(3)式に代入することにより、特定の節点について以下の式を得る。

$$C^n U^n + \sum_j \left\{ \int_S P^* \Phi ds \right\} U^n = \sum_j \left\{ \int_S U^* \Psi ds \right\} P^n \quad \text{--- (4)}$$

高次要素、特に2次要素(Quadratic element)の場合、補間関数は次のようなものである。

$$\Phi^T \text{ or } \Psi^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi-1) & 1-\xi^2 & \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \\ \frac{1}{2}\xi(\xi-1) & 1-\xi^2 & \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \end{bmatrix} \quad \text{--- (5)}$$

さて(4)式をすべての節点について求めると、最終的な弾性方程式を以下の様になる。

$$AU = BP$$

3. 高次要素固有の問題点とその処理

高次要素を用いた場合、(1)節点において特異積分に関する係数 C_{ij} を解析的に評価する



Fig.1 Quadratic Element

のが困難である。(2)応力の不連続点において応力ベクトルが一意的に定まらない、(3)境界形状に高次の形状関数を用いると境界積分に対して定積分の評価が困難となり、数値積分を用いなければならないので、境界近傍の内部応力および内部変位は精度良く求められない。このような問題点に対してその処理法を示す。

(1) Q_i の評価：式(3)において $Q_i U = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S-\epsilon} P^* U ds$ である。今、表面力のない場合を考えると $P=0$ とおくことにより以下の式を得る。

$$Q_i U + \int_{S-\epsilon} P^* U ds = 0 \quad \text{----- (7)}$$

次に 剛体変位 $\bar{U}$ を与えると $(Q_i + \int_{S-\epsilon} P^* ds) \bar{U} = 0$ より、 Q_i を以下の様に得る。

$$Q_i = - \int_{S-\epsilon} P^* ds \quad \text{----- (8)}$$

(2) 応力の不連続点の処理： 図2に示すような場合を考える。

(9)式において応力ベクトルを分離して処理する。つまり、

$$AU = \left[\begin{array}{c|c} P_{i(-)} & P_{i(+)} \\ \hline B_{i(-)} & B_{i(+)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} P_{i(-)} \\ P_{i(+)} \\ P_{i(-)} \\ P_{i(+)} \end{array} \right] \quad \text{----- (9)}$$

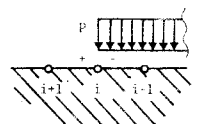


Fig.2 Discontinuity of Stress Vector

である。

(3) 内部力学量の評価： 数値積分を用いて 境界積分を実行すると境界近傍の内部応力および内部変位が 精度良く求められない。これは 境界近傍において特異積分の評価が 数値積分では 精度良く出来ないためと考えられる。次に 3-(1)で用いた方法により、内部変位 U_i 、内部応力 W_{ik} を以下に示すような式を用いれば 精度良く計算することができる。

$$U_i = Q^{-1} \{ \int_S U^* P ds - \int_S P^* U ds \} \quad \text{----- (10)}$$

$$W_{ik} = Q^{-1} \{ \int_S P_{ik}^* U ds + \int_S U_{ik}^* P ds - \int_S P_{ik}^* U ds \} \quad \text{----- (11)}$$

4. 数値計算例

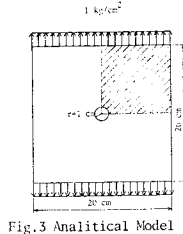


Fig.3 Analytical Model

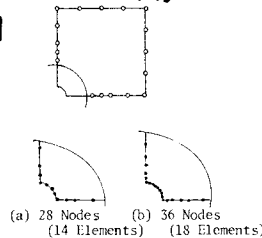


Fig.4 Mesh Division of Boundary Elements

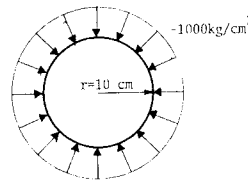


Fig.6 Circular Plate Model submitted to uniform pressure

Table.1 Displacement of Circular Plate end (U_r)

Analytic $U_{re} = 3.5238 \times 10^{-3}$		
Node	$U_{re} \times 10^{-3}$	(Error %)
4 (Q)	3.3680	(1.32)
8 (Q)	3.3219	(0.06)
12 (Q)	3.3223	(0.05)
16 (Q)	3.3231	(0.02)
20 (Q)	3.3235	(0.00)
24 (Q)	3.3237	(0.00)
28 (Q)	3.3237	(0.00)
28 (L)	3.3248	(0.03)

Q: Quadratic Element

L: Linear Element

Table.2 r/R within Error 3% of Radial Normal Stress of Circular Plate

Points of Gauss quad.	r/R Eq.1 (Eq.11)
4	0.80 (0.920)
6	0.92 (0.960)
8	0.93 (0.980)
12	0.96 (0.990)
16	0.98 (0.994)

(16 Elements)

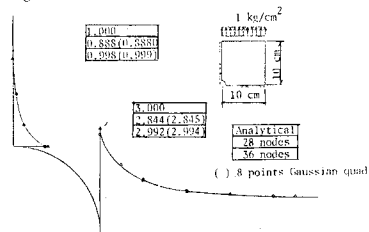


Fig.5 Analytical Result (4 points gaussian quad.)

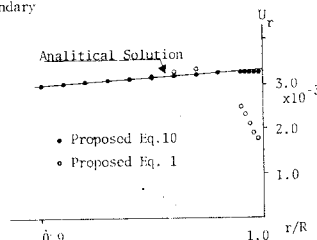


Fig.7 Inner Displacement of Circular Plate U_r (8 Elements)

5. まとめ 以上の数値計算例より得られる結果として ①2次元要素を用いた場合、Gauss 8点積分で精度の良い解が得られる。②内部変位、内部応力は 3-(4)に示した式を用いれば 精度が非常に改善される。