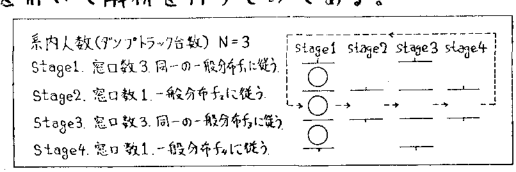
積分方程式を用いた循環待ち行列モデルの定式化と解法に関する研究

京都大学工学部　正　員　吉川和広
京都大学工学部　正　員　春名　攻
京都大学大学院　学生員 ○江尻　良

1. はじめに

本研究では土運搬作業過程におけるサイクリックな作業動態を積分方程式や待ち行列理論を用いてモデル化するとともに数値解析法の考察を行った。いま、対象とする作業過程を図-1に示すように模式的に表すと，stage2，stage4はそれぞれ土取場，土捨場のサービスを，stage1，stage3はそれぞれ運搬路の走行のサービスを行うstageを表している。本解析法では、このような作業過程をサービスが一般分布に従う場合をとりあげて、積分方程式を用いて解析を行うものである。



図－1 モデルの模式図

2. モデルの解析法のあらまし

積分方程式を用いた解析法では，時間の経過を微小な単位時間Δの経過として表すこととする。解析の出発点として、時刻$t=0$においてstage1の3つの窓口で3人の客(ダンプトラック A、B、C)がサービスを受け始めた状態を初期状態とし，この時点の状態確率も同時に設定しておく。つぎに時刻がΔだけ経過した時点における状態確率と，各stageのサービスを終了する客の割合を計算する。このとき本モデルでは一般サービスを仮定しているので、状態の遷移を客が窓口で過去に継続して受けて来たサービス時間の長さごとに異なることを記述することが必要である。このため本解析法では任意の時刻において各窓口でサービスを受けている客に対して、その客が過去に継続して受けて来たサービス時間の期待値を用いて遷移状態を集約的にとらえることとしている。この方法によって、微小時間Δが経過するごとに状態確率と、各窓口を終了する客の割合とを交互に求めるという形で任意の時刻$t=n\Delta$ ($n=0,1,\cdots$)前後の過程の状態変化を記述することができる。このような状態記述のもとで時刻を進めていくと状態確率が一定値に収束する。したがってこれによって定常状態の解析を行うものである。

3. 任意の時刻における各窓口を終了する客の割合の定式化

時刻$t=0$においてstage1の窓口1でサービスを受け始めた客Aの割合を1とする(これはB，客Cについても同様に考えることができる)とき，任意の時刻$t=n\Delta$ ($n=0,1\cdots$)においてstage1，stage2，stage3，stage4のサービスを終了する客Aの割合をそれぞれ$x1(n\Delta)$，$x2(n\Delta)$，$x3(n\Delta)$，$x4(n\Delta)$とする。これらの変数は次式を満たしていなければならない。

$$0 \leqq x1(n\Delta) \leqq 1,\quad 0 \leqq x2(n\Delta) \leqq 1,$$
$$0 \leqq x3(n\Delta) \leqq 1,\quad 0 \leqq x4(n\Delta) \leqq 1,$$

この客の割合の定式化に関する説明を行うにあたって，以下では$x1(n\Delta)$をとり上げて説明していくこととする。さて，$x1(n\Delta)$は次の2つの割合の和として表される。すなわち，

◦割合1：時刻$t=0$から時刻$t=(n-1)\Delta$まで同じ窓口で継続してサービスを受けており，かつ時刻$t=n\Delta$で初めてstage1を終了する

YOSHIKAWA KAZUHIRO, HARUNA MAMORU, EJIRI RYO

客の割合を割合1とする。この割合はstage1のサービス時間の確率密度関数を$f_1(t)$とするとき$f_1(n\Delta)$として求められる。

・割合2：時刻$t=n\Delta$以前に少なくとも1回以上stage1の窓口でサービスを受け、その後stage2, stage3, stage4の各窓口でのサービスを終了し、あらためて時刻$t=n\Delta$にstage1の窓口のサービスを終了する客の割合を割合2とする。

上述の割合のうち、割合2は客Aがstage1を終了した時点において、stage2において①客Aがただちにサービスを受け始める，②他の1人の客がサービスを受け始める，③他の1人の客がすでにサービスを受けている，④他の1人の客がサービスを受け始めもう1人の客が待ち行列を作り始める，⑤他の1人の客がすでにサービスを受けておりもう1人の客が待ち行列を作り始める，という①～⑤の事象が生起することを考えて求めなければならない。またこれらの①～⑤の各事象は客Aがstage3を終了した時点においても生起することは明らかである。これらのことから$x1(n\Delta)$は以下のように定式化することができる。

$$
\begin{aligned}
x1(n\Delta) = {} & f_1(n\Delta) + \sum_{i=0}^{n-1} x1(i\Delta)\cdot\sum_{j=0}^{n-1}[G40(j\Delta) \\
& \cdot f_{41}\{(n-j)\Delta\} + G41(j\Delta)\cdot f_{441}\{(n-j)\Delta\} + G42(j\Delta) \\
& \cdot f^{*}_{441}\{\overline{I4(j\Delta)},(n-j)\Delta\} + G43(j\Delta)\cdot f_{4441}\{(n-j)\Delta\} + \\
& G44(j\Delta)\cdot f^{*}_{4441}\{\overline{I4(j\Delta)},(n-j)\Delta\}]\cdot[G20(i\Delta)\cdot f_{23}\{(j-i)\Delta\} \\
& + G21(i\Delta)\cdot f_{223}\{(j-i)\Delta\} + G22(i\Delta)\cdot f^{*}_{223}\{\overline{I2(i\Delta)}, \\
& (j-i)\Delta\} + G23(i\Delta)\cdot f_{2223}\{(j-i)\Delta\} + G24(i\Delta) \\
& \cdot f^{*}_{2223}\{\overline{I2(i\Delta)},(j-i)\Delta\}]
\end{aligned}
$$

ここで $f_{41}=f_4 \circledast f_1$：$f_4$と$f_1$のたたみこみ(convolution)を表わしている。

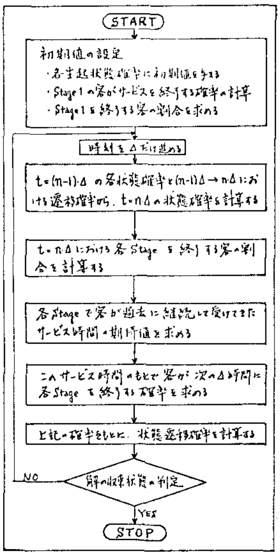
$f^{*}(I,\tau)$：過去継続してI時間だけサービスを受けて来た客が次のτ時間に終了する確率

$G20(i\Delta),\cdots,G44(i\Delta)$：時刻$t=i\Delta$に上記の事象①,…④が生起する確率

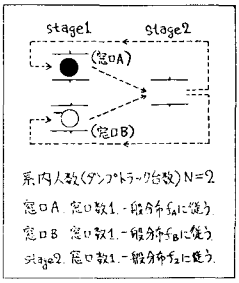
$I_k(i\Delta)$：時刻$t=i\Delta$において，stage$k$ (k=1,2,3,4)でサービス中の客が過去に継続して受けて来たサービス時間の期待値.

4. 解析法におけるプロセス

解析法の手順を図－2に示す。このとき時刻$t=n\Delta$における生起状態としては、各stageでサービスを受けている客数の組合せによってのみ区別することとしている。また遷移確率は各stageで客が$\overline{I_k(n\Delta)}$ (k=1,2,3,4)だけサービスを受けて来たときに，次の単位時間Δ内にその窓口でサービスを終了する確率と生起しうる遷移状態とを考えあわせることによって計算することができる。



図－2 解析のフローチャート



図－3 モデルの模式図

5. 複合されたサイクルキューの定式化

図－3に示すように2つの土取場から1つの土捨場へ客が移動するタイプのモデルに関しては、それぞれの客ごとに各stageを終了する割合を計算することによって遷移確率を求める方法を用いることにより解析を行うことができる。これについては講演時に説明することとする。

6. おわりに

以上では積分方程式その他による待ち行列モデルによる解析について述べてきたが、この解析法を用いた数値計算例およびその問題点に関しては、ここでは詳述できないので講演時に具体的に述べることとする。