固有値による等ひずみサンドドレーンの評価について

京都大学工学部　正員　田村 武
京都大学大学院　学生員 ○ 吉岡 淳

1 目的

多次元圧密について、すでに、Biotの方程式より変位を消去して間げき水圧のみで表わした圧密の方程式が提案されている。これによって、圧密が固有値問題として扱われ得ること、すなわち、圧密の方程式に関する次の様な性質が容易に説明される。つまり、間げき水圧分布を表わす圧密の方程式の解 $u(x,t)$ を時間と位置に関して変数分離型におくことによって、方程式は固有値 λ_α および固有関数 $u_\alpha(x)$ をもつ。そして、解はこれを用いて

$$u(x,t)=\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha u_\alpha(x) e^{-\lambda_\alpha t} \qquad a_\alpha：定数 \qquad (1)$$

と級数表示され、各固有関数が時間とともに指数関数的に減少することから、最小固有値（第一固有値）に対応する第一固有関数が圧密の後半において支配的であることがわかる。また、係数 a_α については、その二乗が、系のひずみエネルギーのうちのそれぞれの固有関数が分担するひずみエネルギーを表わしている。

本研究では、間げき水圧で表わした圧密の方程式をサンドドレーンの数値解析に応用し、上述の性質を用いて、等ひずみ条件の場合のサンドドレーンの圧密の速さについて検討を加えるとともに、等ひずみ条件による砂柱への応力集中についてもふれる。

2 解析手法と計算例

有限要素法を用いて数値計算を行なう。これに際して、間げき水圧で表わした圧密の方程式は次の様に定式化される。

$$\lambda_\alpha A \underset{\sim}{w_\alpha} = Y \underset{\sim}{w_\alpha} \qquad \alpha=1,2,\cdots,m \qquad (2)$$

ここで、

λ_α；固有値

$\underset{\sim}{w_\alpha}$；固有関数（ベクトル）

A；ある一つの要素に単位の間げき水圧が存在するときに全要素に生ずる体積変化量を列ベクトルにもつ行列

Y；各要素間の間げき水の流出入量を表わす行列

m；全要素数

である。

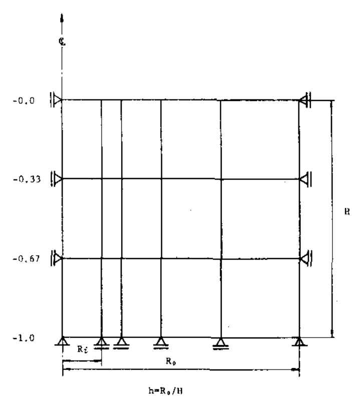

Fig.1　要素分割

計算は、Fig.1 に示す要素分割を用いて行なった。他との直接比較のため、図中に示すように数値はすべて正規化した値を用いる。境界条件は、排水に関しては上端のみ排水で他は非排水であり、変位に関しては記号をもって図中に示してある。ただし、上端での鉛直変位は半径方向に一様である。

材料定数は粘土を基準として、砂のヤング率を E_s/E_c，透水係数を k_s/k_c として表わす。

TAMURA TAKESHI　　YOSHIOKA ATSUSHI

本研究では、$h=0.1, 0.2$、$n=2, 3, 4, 5, 10, 20$、$E_s/E_c=0, 5, 50$、$k_s/k_c=10^3, \infty$の各場合について計算を行なった。

3 結果と考察

まず、第一固有値λ_1の大きさを調べる。Fig.2からわかる様に、nが大きくなるにつれλ_1が小さくなり、圧密の速さが遅くなることがわかる。これは、一次元圧密の状態に近づくことから容易に理解し得る。また、nが小さい場合には、砂の透水性を考慮するかどうかで大きな違いが生ずる。図中の破線は、Barronが提案した固有値の簡略的計算式による値であり、砂の剛性、透水性を考慮しない場合にはかなり良い近似を与える。

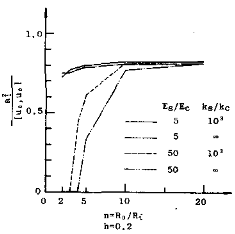

Fig.3 エネルギー比

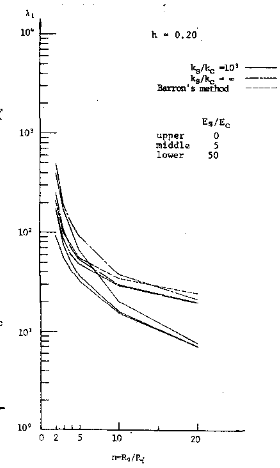

Fig.2 第一固有値λ_1

次に、第一固有関数が他に対してどの程度支配的であるかを、(1)式の係数a_1によって調べる。ここで、a_1^2は第一固有関数のもつひずみエネルギーであり、これと系の全ひずみエネルギーとの比をとったものがFig.3である。nが大きいところでは一次元圧密状態に近いので、いずれの場合もTerzaghiの一次元圧密の方程式における値0.83…に近い。

h	Es/Ec	ks/kc	n	$\frac{a_1}{[u_0, u_0]}$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_2/λ_1
0.1	50	∞	3	0.0514	1059.6	1067.0	1122.2	1.007
0.1	50	∞	4	0.0111	585.9	588.5	631.9	1.004
0.2	50	∞	4	0.0001	126.0	135.2	174.5	1.073
0.2	50	10^3	3	0.0024	169.3	186.8	261.4	1.103
0.2	5	∞	20	0.8164	19.8	35.7	51.7	1.803
0.10	50	10^3	20	0.8299	8.70	51.0	81.8	5.86

Table.1 第一～第三固有値

また、このとき、a_1は全体の9割以上であり、間げき水圧分布はほぼ第一固有関数によって決定されるといえる。これに対して、$E_s/E_c=50$の場合、nが小さいところでこの値がほとんど0となっており、第一固有関数が間げき水圧分布に無関係である。

Table.1は、このような場合の第一～第三固有値を調べたもので、エネルギー比が0に近い場合は、第一固有値と第二、第三固有値に差がないことがわかる。したがって、このような場合も含めて、第一固有値の大小をもって圧密の速さを論ずるのは妥当であるといえる。

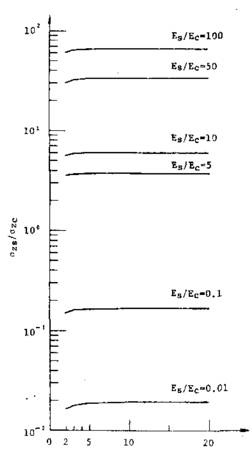

Fig.4 応力分担比

また、Fig.5は、砂柱と粘土層の応力分担比を表わすグラフである。本研究では、砂、粘土ともに等方弾性体として扱っているため、弾性問題よりこれを求めた。この図より、砂と粘土の境界面で互いに拘束しあっているためであろうか、ヤング率の比E_s/E_cの約6～7割程度の比で応力の分担が行なわれていることがわかる。

最後に、研究にあたり、あたたかくご指導下さいました赤井浩一教授に心から感謝の意を表します。

参考文献

田村 武 (1980); 多次元圧密における固有値問題とその応用, 土木学会論文報告集, 第293号, pp. 79-89